



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Днепропетровск - 2014

Содержание

- **Лекция 1.** Введение. Основные определения. Реальный объект и расчетная схема. Схематизация свойств материала и геометрии объекта. Внешние силы. Метод сечений. Внутренние усилия. Напряжения. Перемещения и деформации. Виды простейших деформаций.
- **Лекция 2.** Внутренние усилия при растяжении-сжатии. Построение эпюр продольных сил и крутящих моментов.
- **Лекция 3.** Чистый и поперечный изгиб. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
- **Лекция 4.** Центральное растяжение-сжатие. Принцип Сен-Венана. Напряжения и деформации. Коэффициент Пуассона. Закон Гука. Модуль упругости. Напряжения на наклонных площадках. Перемещения при растяжении сжатии. Учет собственного веса.
- **Лекция 5.** Диаграмма сжатия. Основные механические характеристики. Основные сведения о расчете конструкций. Методы допускаемых напряжений и предельных состояний.
- **Лекция 6.** Краткие сведения о напряженном и деформированном состояниях в точке. Виды напряженных состояний. Анализ плоского напряженного состояния. Напряжения на наклонных площадках. Главные напряжения и положения главных площадок. Максимальные касательные напряжения. Понятие о круге Мора для напряжений.
- **Лекция 7.** Геометрические характеристики поперечных сечений. Статические моменты. Определение координат центра тяжести поперечного сечения. Осевой, центробежный и полярный моменты инерции. Моменты инерции простейших фигур. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей. Зависимость между моментами инерции при повороте осей. Главные оси и главные моменты инерции. Понятие о радиусе инерции.
- **Лекция 8.** Изгиб балок. Основные допущения. Нормальные напряжения при чистом изгибе. Момент сопротивления при изгибе. Условие прочности по нормальным напряжениям. Касательные напряжения при поперечном изгибе. Распределение касательных напряжений для некоторых типов поперечных сечений. Условие прочности на сдвиг.
- **Лекция 9.** Перемещения при изгибе. Дифференциальные уравнения изогнутой оси балки и его интегрирование. Метод начальных параметров.
- **Лекция 10.** Понятие о чистом сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Связь между модулями упругости при растяжении и сдвиге. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Напряжения и перемещения. Анализ напряженного состояния.
- **Лекция 11.** Теории прочности.
- **Лекция 12.** Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Формула Эйлера. Учет влияния способов закрепления концов стержня.

Рекомендуемая литература

1. Бондаренко А.Н. Курс лекций по сопротивлению материалов Часть 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, Москва – 2007г.
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов для вузов. М.: Высшая школа. 1995, 2001 г. 560 с.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов под ред. Александрова А.В., М.: Стройиздат. 1977г. 335 с.
4. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 622 с.
5. Сопротивление материалов : учеб. пособие / Н. А. Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская и др. ; под ред. Н.А. Костенко. – М. : Высш. шк., 2000. – 430 с.
6. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
7. Сопротивление материалов / под ред. Г. С. Писаренко. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.

◀ Лекция 1 ▶

■ Введение

Сопротивление материалов является частью более общей науки – механики твердого деформируемого тела, в которую входят: теория упругости, теории пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения и др. Задачей сопротивления материалов является изучение методов расчета простейших элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость.



Прочностью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил не разрушаясь.

Жесткостью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, получая лишь малые упругие деформации.

Устойчивостью называется способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием сил.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную форму и размеры, то есть **деформируются**. Деформации тела, исчезающие после снятия внешних сил, называются **упругими**, а не исчезающие – **остаточными** или **пластическими**.

■ Определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается возможность разрушения деталей, является целью расчета на прочность.

■ Определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций этих деталей, является целью расчета на жесткость.

■ Реальный объект и расчетная схема

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, не влияющих заметным образом на работу системы в целом, называется расчетной схемой. Переход от реального объекта к расчетной схеме осуществляется путем схематизации свойств материала, системы приложенных сил, геометрии реального объекта, типов опорных устройств и т.д.

■ Схематизация свойств материала

Реальные материалы обладают разнообразными физическими свойствами и характерной для каждого из них структурой.

С целью упрощения расчетов в сопротивлении материалов используются следующие допущения о свойствах материала.

1. Материал считается **однородным**, если его свойства во всех точках одинаковы.
2. Материал считается **изотропным**, если его свойства во всех направлениях одинаковы.

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

3. Материал обладает свойством **идеальной упругости**, вследствие которой деформируемое тело полностью восстанавливает свою форму и размеры после снятия нагрузки независимо от величин нагрузок и температуры тела.
4. Форма и размеры упругого тела меняются прямо **пропорционально изменению нагрузок**, то есть подчиняется закону Гука (1660 г.).
5. Материал обладает свойством **сплошности**, то есть способностью сплошь (без пустот) заполнять пространство, ограниченное поверхностью тела. Вследствие этого материал считается непрерывным, что позволяет использовать для определения напряжений и деформаций математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.
6. Упругие тела являются относительно жесткими, благодаря чему **перемещения точек тела весьма малы по сравнению** с размерами самого тела. Эта гипотеза служит основанием для использования при расчете начальных (исходных) размеров тела (по недеформированной схеме).

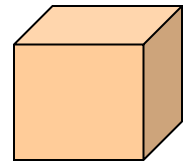
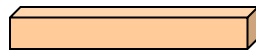
■ **Схематизация геометрии реального объекта** – упрощает геометрию реально существующих тел, составляющих конструкцию.

Большинство сооружений, механизмов и машин можно расчленить на отдельные тела простой геометрической формы:

Брус - тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим (стержни, стойки, валы, балки). Брус может иметь различную форму поперечного сечения (круглое, кольцевое, прямоугольное, коробчатое, двутавровое и др.). Поперечное сечение образуется при разрезе бруса плоскостью, перпендикулярной продольной оси, а продольная ось является линией, соединяющей центры тяжести поперечных сечений, и может быть прямой или криволинейной. Брус является основным объектом рассмотрения в курсе сопротивления материалов. Следующие тела являются объектами рассмотрения в других разделах механики твердого деформируемого тела (теория пластин и оболочек, теория упругости и др.):

Оболочка, пластина - тело, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими (тонкостенные резервуары, оболочки перекрытия, плиты, стенки).

Массив - тело, все три измерения которого мало отличаются друг от друга (фундаментные блоки, шарик подшипника, тело гравитационной плотины).



■ **Схематизация силового воздействия** – представляет модель механического действия **внешних сил** на объект от других тел или сред. К внешним силам относятся также и **реакции связей**, определяемые методами теоретической механики. Схематизация силового воздействия сводится к рассмотрению трех типов нагрузки:

Сосредоточенная сила – сила, рассматриваемая в курсе теоретической механики как вектор, характеризуемый модулем (величиной), направлением действия и точкой приложения. Здесь такая сила является условной, поскольку механическое взаимодействие деформируемых тел не может осуществляться в точке (площадь контакта не равна нулю). Условность состоит в том, что в случае малости площадки контакта по сравнению с размерами объекта, **сила считается приложенной в точке**. Если же определяются контактные напряжения, например, в головке рельса, то учитывается фактическое распределение нагрузки на рельс по площадке контакта, размеры которой зависят от величины сжимающей силы (равнодействующей давления). Сосредоточенная сила измеряется в ньютонах (Н).

Объемные силы – силы, распределенные по объему (силы тяжести, силы инерции), приложенные к каждой частице объема. Для этих сил схематизация часто состоит в задании простого закона изменения этих сил по объему.

Объемные силы определяются их интенсивностью, как предел отношения равнодействующей сил в рассматриваемом элементарном объеме к величине этого объема, стремящегося к нулю:

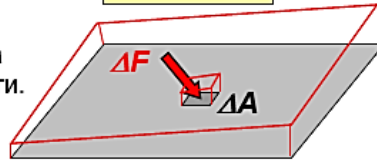
$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

и измеряются в Н/м³.

Лекция 1 (продолжение – 1.3)

Поверхностные силы – силы, распределенные по поверхности (давление жидкости, газа или другого тела), характеризующиеся интенсивностью давления, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной площадке к величине площади этой площадки, стремящейся к нулю:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

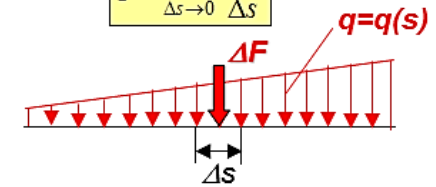


и измеряются в Н/м².

Для этих сил схематизация часто состоит в задании простого закона изменения этих сил по поверхности.

Линейно распределенная нагрузка – силы, распределенные по некоторой линии (длине), характеризующаяся интенсивностью нагружения, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной длине линии к величине длины этой линии, стремящейся к нулю:

$$q = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}$$

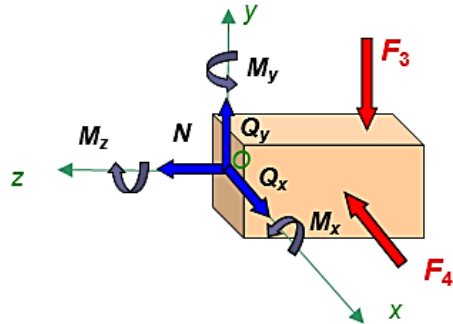


и измеряются в Н/м.

Для этих сил условность состоит в представлении области контакта в виде линии нулевой толщины. Характер изменения часто задается в виде простого закона (постоянного, линейного).

По характеру воздействия на сооружения внешние силы делятся на статические и динамические. **Динамическая нагрузка** быстро изменяется во времени (при движении подвижного состава, колебания, удар). При медленном изменении нагрузки можно пренебречь силами инерции и деформациями, возникающими в объекте, и такая нагрузка может условно считаться **статической**. По времени действия на сооружения нагрузки делятся на **постоянные** (вес пролетного строения, вес мостового полотна) и **временные** (нагрузка от проходящего подвижного состава, ветровая или снеговая нагрузка). Временные нагрузки регламентируются специальными документами (СНиП, ТУ).

■ **Внутренние силы** – Под действием **внешних сил** на объект происходит изменение расстояний между частицами (атомами) рассматриваемого тела и сил взаимодействия между ними. В результате возникают так называемые **внутренние силы**, которые можно определить **методом сечений**:



1. Пусть брус под действием сил F_1, F_2, \dots находится в равновесии. Для рассматриваемого объекта удовлетворяются уравнения равновесия:
2. Проведем сечение плоскостью, совпадающей с поперечным сечением бруса, в котором отыскиваются внутренние силы.
3. Отбросим одну из частей (например, левую) и заменим ее действие на оставшуюся часть бруса совокупностью реактивных сил, распределенных некоторым образом по поверхности поперечного сечения.
4. Полученную систему внутренних сил можно упростить приведением к главному вектору и главному моменту, выбрав в качестве центра приведения центр тяжести поперечного сечения.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & \sum M_{xi} = 0; \\ \sum Y_i = 0; & \sum M_{yi} = 0; \\ \sum Z_i = 0; & \sum M_{zi} = 0. \end{cases}$$

5. Разложим главный вектор и главный момент на составляющие по осям x, y, z : R_x, R_y, R_z и M_x, M_y, M_z .

6. Полученные компоненты имеют в сопротивлении материалов специальные названия, соответствующие видам деформации: $R_z = N$ – нормальная сила, $R_x = Q_x, R_y = Q_y$ – поперечные силы и M_z – крутящий момент, M_x, M_y – изгибающие моменты.

7. Поскольку оставленная часть бруса должна остаться в равновесии, полученные внутренние силовые факторы могут быть определены: из уравнений равновесия, составленных для этой части:

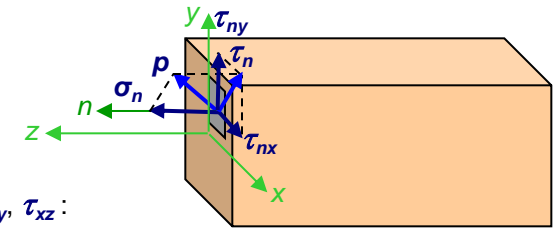
Лекция 1 (продолжение 1.4)

■ Напряжения – мера, характеризующая распределение внутренних сил по сечению.

Поскольку внутренние силы, представляют собой поверхностные силы, приложенные к поперечному сечению оставленной части, то интенсивность этих сил, называемое **полным напряжением**, определяется как указано ранее: Размерность этого напряжения совпадает с размерностью поверхностной нагрузки (Н/м^2 , $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2$).

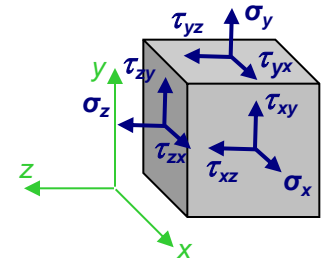
$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Полное напряжение, как и равнодействующая внутренних сил, приложенных на элементарной площадке, является векторной величиной и может быть разложено на две составляющие: перпендикулярное к рассматриваемой площадке – **нормальное напряжение σ_n** и касательное к площадке – **касательное напряжение τ_n** :



Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на две составляющие, параллельные координатным осям x, y , связанным с поперечным сечением – τ_{nx}, τ_{ny} :

При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки выделяется бесконечно малый объемный элемент (параллелепипед со сторонами dx, dy, dz), по каждой грани которого действуют, в общем случае, три напряжения, например, для грани, перпендикулярной оси x (площадка x) – $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$:



Компоненты напряжений по трем перпендикулярным граням элемента образуют систему напряжений, описываемую так называемым **тензором напряжений**:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

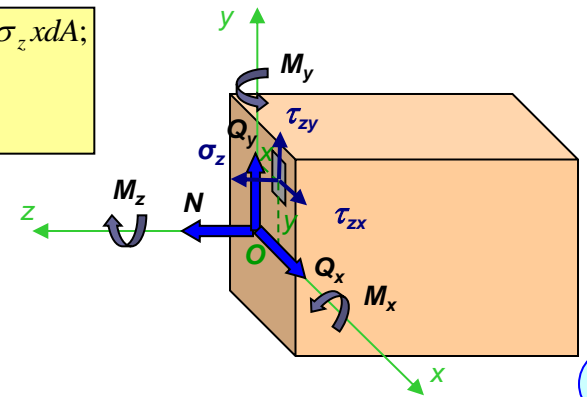
Здесь первый столбец представляет компоненты напряжений на площадках, нормальных к оси x , второй и третий – к оси y и z соответственно. Первый индекс указывает площадку (“место”) действия, второй – направление. Для нормальных напряжений индексы совпадают и один индекс опускается.

■ Связь внутренних усилий и напряжений – Внутренние усилия в сечении, как было показано выше,

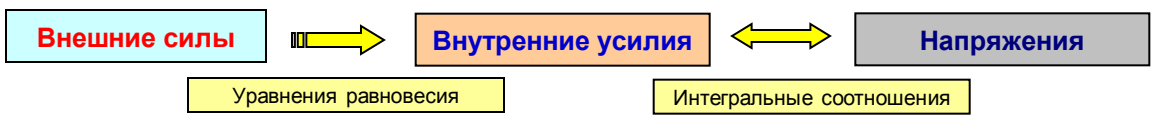
связаны уравнениями равновесия с внешними силами, приложенными к оставленной части бруса при его сечении. С другой стороны внутренние усилия есть результат приведения к центру поперечного сечения внутренних сил, приложенных к элементарным площадкам (напряжений), выполняемое сложением, которое для элементарных сил сводится к **интегрированию** по площади поперечного сечения.

Выполнение этой операции для каждого из внутренних усилий приводит к следующим интегральным выражениям:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA; & M_x &= \int_A \sigma_z y dA; & M_y &= -\int_A \sigma_z x dA; \\ Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA; & Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA; & M_z &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA. \end{aligned}$$



Таким образом, в целом связь внешних сил, внутренних усилий и напряжений такова:



Лекция 1 (продолжение – 1.5)

■ **Перемещения** – переход точек тела в новое положение вследствие изменения формы и размеров тела под действием нагрузки.

Полное перемещение точки в пространстве раскладывается на компоненты u , v и w , параллельные осям x , y и z , соответственно. Перемещения рассматриваемой точки зависят от деформации всех нагруженных областей тела и включают в себя перемещения как жесткого целого ненагруженных областей. Таким образом, перемещения не могут характеризовать степень деформирования в окрестности рассматриваемой точки.

■ **Деформация в точке** – мера деформирования материала в ее окрестности. Выделим в рассматриваемой точке тела элементарный объем (параллелепипед со сторонами dx , dy , dz) и рассмотрим его возможные изменения размеров и формы.

Пусть за счет деформации длины его ребер получат **абсолютные удлинения** Δdx , Δdy и Δdz .

Относительные линейные деформации в точке:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Кроме линейных деформаций, связанных с изменением размеров линейных элементов возникают **угловые деформации** или **углы сдвига**, связанные с изменением формы.

Например, в плоскости xy могут возникать малые изменения первоначально прямых углов параллелепипеда:

$$\frac{\Delta x}{dy} = \operatorname{tg} \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}.$$

Такие угловые деформации в общем случае могут иметь место во всех трех плоскостях. Все относительные деформации весьма малы и имеют для реальных материалов порядок $\approx 10^{-4}$ - 10^{-3} .

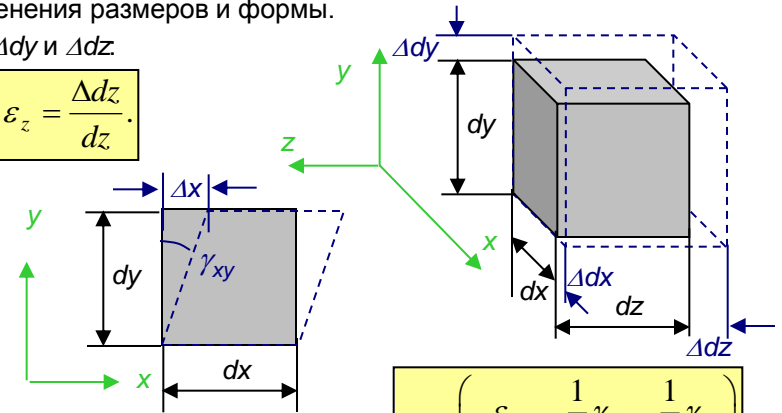
Таким образом, совокупность относительных линейных и угловых деформаций определяют деформированное состояние в точке и образуют **тензор деформаций**, подобный тензору напряжений:

Примечание: Половинные углы сдвига используются в целях получения аналогичных формул преобразования с тензором напряжений.

В зависимости от того, какие из компонент относительных деформаций имеют нулевое значение в рассматриваемой области или для всего тела различают следующие **простые виды деформаций**:

1. **Линейная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, углы сдвига равны нулю, остальными линейными относительными деформациями пренебрегается (характеризуется абсолютным и относительным удлинением).
2. **Плоская деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$ или $\varepsilon_y \neq 0$, остальные относительные деформации равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным сужением площади поперечного сечения). Эти виды деформаций обычно реализуются при растяжении-сжатии.
3. **Объемная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$, углы сдвига равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным изменением объема).
4. **Чистый сдвиг** – линейные относительные деформации равны нулю, углы сдвига не равны нулю (характеризуется изменением формы, изменение объема не происходит). Это вид деформации также возникает при кручении.

В соответствии с видом деформации вначале последовательно изучают такие простейшие напряженно-деформированные состояния как растяжение-сжатие, чистый сдвиг и кручение, чистый изгиб. Далее изучаются более сложные – поперечный изгиб, сложное сопротивление, продольный изгиб.



$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Лекция 2

■ **Определение внутренних усилий** – Внутренние усилия определяются **методом сечений** в совокупности точек по длине бруса с целью обнаружения их максимальных значений. График изменения внутреннего усилия по оси бруса называется **эпюрой**.

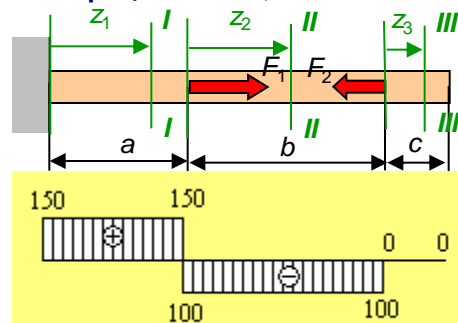
Общий порядок построения эпюр внутренних усилий:

1. Если необходимо, то **определяются опорные реакции** так, как это делается в курсе теоретической механики (выбрать объект, отбросить связи, заменить отброшенные связи реакциями, составить уравнения равновесия). Реакции можно не находить, если они не входят в число внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемых сечений.
2. **Определяется число участков** по длине бруса, на которых нагрузка или геометрия бруса не изменяется. Границей участка является любой фактор, влияющий на резкое (скачкообразное) изменение рассматриваемого внутреннего усилия (начало или конец бруса, перелом оси бруса, место расположения опоры, точка приложения внешней сосредоточенной силы или другого фактора, например, сосредоточенного момента, начало или конец распределенной нагрузки).
3. **На каждом из участков проводится сечение**, отстоящее от начала участка на некотором произвольном (переменном) расстоянии. Для каждого сечения указывается текущая координата (z) от начала участка или от начала бруса и записываются пределы изменения координаты. При выборе начала локальных координат в начале участка нижний предел всегда равен нулю.
4. Для рассматриваемого сечения **определяется выражение внутреннего усилия в функции от координаты z** рассмотрением равновесия оставленной части или используя установленные определения для вычисления внутреннего усилия по внешним силам, расположенным по одну сторону от сечения.
5. По полученным выражениям **строится эпюра изменения усилия подстановкой верхнего и нижнего пределов**, и если необходимо, других значений координат в разрешенном интервале, обычно в середине интервала.

■ **Внутренние усилия при растяжении-сжатии** – При растяжении-сжатии в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор – **продольная сила N** . В соответствии с методом сечений величина и направление продольной силы может быть найдены из уравнения равновесия в проекции на ось, совпадающую с осью стержня, составленного для оставленной части:

$$N + \sum Z_i^{\text{оставл. части}} = 0;$$

■ Продольная сила считается **положительной**, если она вызывает **растяжение**, т.е. направлена от сечения (в сторону внешней нормали), и **отрицательной**, если она вызывает **сжатие**, т.е. направлено к сечению.



Пусть прямолинейный брус нагружен продольными силами F_1, F_2 :

1. Реакции левой опоры можно не определять, т.к. в этом примере можно ограничиться рассмотрением лишь сил, приложенных к правым оставленным частям (справа от сечений).
2. Число участков - 3
3. Проведем сечение $I-I$ на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_1 \leq a$.
4. Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N^{I-I} и составим уравнение равновесия в проекции на ось z :

$$\sum Z_i = 0; \quad -N^{I-I} + F_1 - F_2 = 0.$$

Лекция 2 (продолжение – 2.2)

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 1 : $N^{I-I} = F_1 - F_2$.

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение II-II на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_2 \leq b$.

4. Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N^{II-II} и составим уравнение равновесия в проекции на ось z : $\sum Z_i = 0; -N^{II-II} - F_2 = 0$.

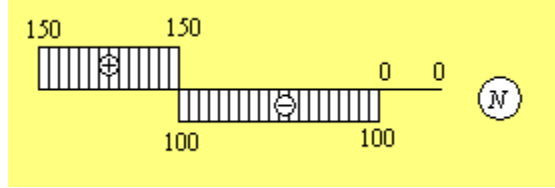
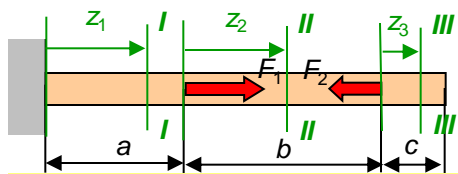
Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 2 : $N^{II-II} = -F_2$.

Аналогично получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq c$): $\sum Z_i = 0; -N^{III-III} = 0$. $N^{III-III} = 0$.

Полученные выражения показывают, что **продольная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций на ось бруса сил, взятых по одну сторону от сечения!**

$N = \sum F_{xi}^{прав} = \sum F_{xi}^{лев}$.

Знак слагаемых положителен, если рассматриваемая сила направлена от сечения, т.е. будучи приложена к сечению вызывает растяжение части бруса по другую сторону от сечения.



Используя полученные выражения для продольной силы построим эпюру продольных сил: При построении **эпюры N**, положительные значения обычно откладываются вверх от базисной линии или вправо, если она вертикальна. Пусть $F_1=250$ кН, $F_2=100$ кН. Откладывая на каждом из участков значения продольной силы в некотором выбранном масштабе получаем эпюру N:

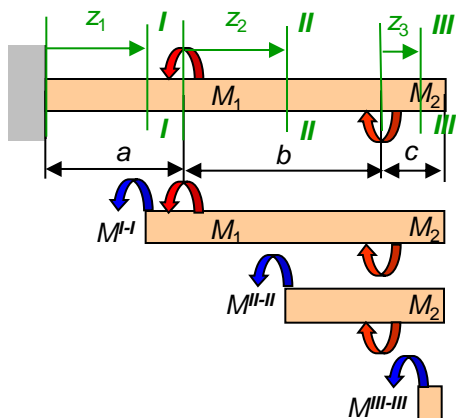
Обратите внимание, что **скачки на эпюре N располагаются в точках приложения внешних сосредоточенных сил и равны величинам этих сил**. Соответственно скачок на левом конце эпюры дает величину опорной реакции.

Лекция 2 (продолжение – 2.3)

- **Внутренние усилия при кручении** – При кручении в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор – **крутящий момент M_z** . В соответствии с методом сечений величина и направление крутящего момента может быть найдены из уравнения равновесия в моментах относительно оси, совпадающей с осью стержня, составленного для оставленной части:
- Крутящий момент считается **положительным**, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он поворачивает сечение **по ходу часовой стрелки**.
- **Построение эпюры крутящих моментов** принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил. Положительные значения откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз.

Пусть прямолинейный брус нагружен внешними сосредоточенными крутящими моментами M_1, M_2 :

1. Реакции левой опоры можно не определять.
2. Число участков - 3



3. Проведем сечение **I-I** на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_1 \leq a$.

4. Отбросим левую часть, заменим ее действие крутящим моментом M_z^{I-I} и составим уравнение равновесия в моментах относительно оси z : $\sum M_{zi} = 0$; $-M_z^{I-I} - M_1 + M_2 = 0$.

Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 1: $M_z^{I-I} = -M_1 + M_2$.

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение **II-II** на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_2 \leq b$.

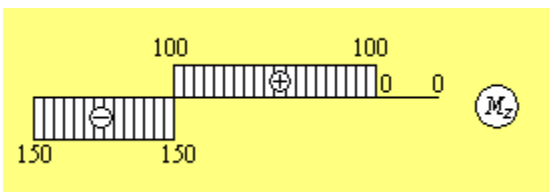
4. Отбросим левую часть, заменим ее действие крутящим моментом M_z^{II-II} и составим уравнение равновесия в моментах относительно оси z : $\sum M_i = 0$; $-M_z^{II-II} + M_2 = 0$.

Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 2: $M_z^{II-II} = M_2$.

Аналогично получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq c$): $\sum M_{zi} = 0$; $-M_z^{III-III} = 0$. $M_z^{III-III} = 0$.

Полученные выражения показывают, что **крутящий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси бруса, взятых по одну сторону от сечения!**

$$M_z = \sum M_{zi}^{\text{прав}} = \sum M_{zi}^{\text{лев}}$$



Используя полученные выражения для крутящего момента построим эпюру крутящих моментов: Пусть $M_1=250$ Нм, $M_2=100$ Нм. Откладывая на каждом из участков значения крутящего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюру M_z :

Обратите внимание, что **скачки на эпюре M_z располагаются в точках приложения внешних сосредоточенных моментов и равны величинам этих моментов**. Соответственно скачок на левом конце эпюры дает величину опорного момента.

Лекция 3

- **Определение опорных реакций в балках** – выполняется методами теоретической механики.

После вычисления всех реакций **обязательно должна быть сделана проверка** составлением такого уравнения равновесия, в котором бы присутствовали все или большинство из найденных реакций. Поскольку балки несут преимущественно вертикальную нагрузку, то в общем случае рекомендуется воспользоваться **формой II** и проверить вертикальные реакции составлением **уравнения в проекциях на вертикальную ось**.

- **Внутренние усилия при изгибе** – При изгибе возникают в общем случае изгибающие моменты M_x , M_y и поперечные силы Q_x , Q_y . Если в поперечном сечении возникает только один изгибающий момент M_x , то такой изгиб называется **чистым**. В большинстве случаев дополнительно к изгибающему моменту возникает поперечная сила Q_y , и такой изгиб называется **поперечным**.

Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, то такой изгиб называется **плоским**.

- **Правила знаков для изгибающего момента** – Изгибающий момент принимается положительным, если он изгибает элемент балки так, нижние волокна оказываются растянутыми, т.е. ось балки искривляется выпуклостью вниз.

- **Правила знаков для поперечной силы** – Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть элемент балки по ходу часовой стрелки.

- **Дифференциальные зависимости при изгибе** – связывают внутренние усилия между собой в сечении и нагрузкой. Выделим из балки элемент длиной dz , находящийся по действию внешней вертикальной равномерно распределенной нагрузкой q , и заменим действие отброшенных частей внутренними усилиями:

Выделенный элемент находится в равновесии и удовлетворяет уравнения равновесия:

$$\sum Y_i = 0; \quad Q_y - q_y dz - (Q_y + dQ_y) = 0;$$

Из первого уравнения получаем:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y.$$

Производная от поперечной силы по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

$$\sum M_{0i} = 0; \quad -M_x - q_y dz \frac{dz}{2} - (Q_y + dQ_y) dz + (M_x + dM_x) = 0.$$

Из второго уравнения, пренебрегая малыми второго порядка получаем:

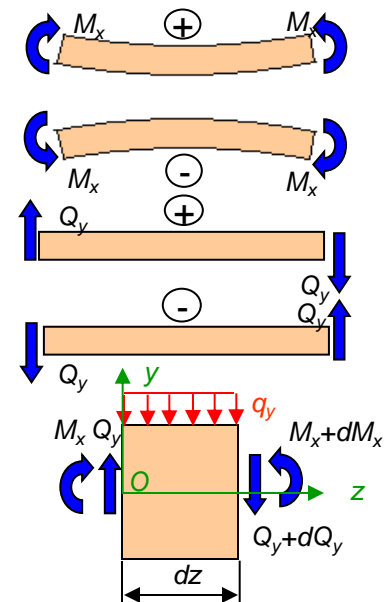
$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

Производная от изгибающего момента по продольной координате равна поперечной силе.

С использованием этих основных зависимостей получаем:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y.$$

Вторая производная от изгибающего момента по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

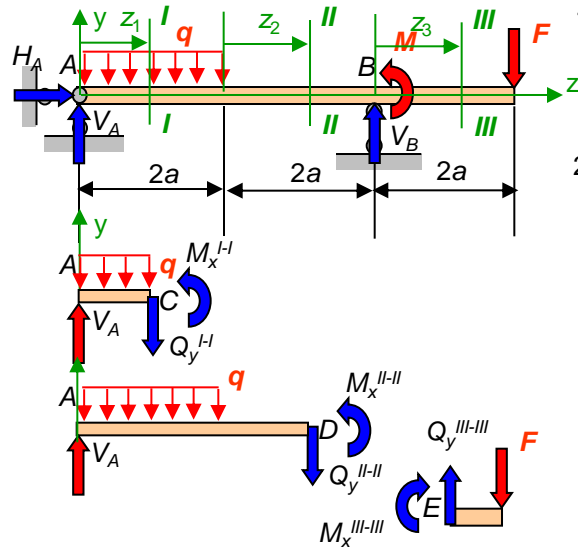


Лекция 3 (продолжение – 3.2)

- Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил** – принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил и крутящих моментов. Положительные значения поперечной силы Q_y откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз. Положительные значения изгибающих моментов M_x откладываются **вниз** – со стороны растянутого волокна. Таким образом расположение ординат эпюры M_x указывают, какие волокна растянуты.

Примечание: Это правило принято в строительных и транспортных вузах в то время, как в машиностроительных и авиационных вузах используется обратное правило (положительный момент откладывается со стороны сжатого волокна).

Пусть балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , сосредоточенной силой $F=qa$ и крутящим моментом $M=qa^2$:



1. Определяем опорные реакции:

$$\sum Z_i = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -F6a + M + V_B 4a - (q2a)a = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -F2a + M + (q2a)3a - V_A 4a = 0;$$

$$V_B = 1,75qa$$

$$V_A = 1,25qa$$

2. Количество участков – 3.

3. Проведем сечение **I-I** на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_1 \leq 2a$.

4. Отбросим правую часть, заменим ее действие поперечной силой Q_y^{I-I} и изгибающим моментом M_x^{I-I} и составим уравнения равновесия в проекциях и в моментах относительно оси x , проходящей через центр текущего сечения (т.е. относительно точки C):

$$\sum Y_i = 0; \quad V_A - qz_1 - Q_y^{I-I} = 0; \quad \sum M_{Ci} = 0; \quad -V_A z_1 + qz_1 \frac{z_1}{2} + M_x^{I-I} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$Q_y^{I-I} = V_A - qz_1.$$

$$M_x^{I-I} = V_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2}.$$

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение **II-II** на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_2 \leq 2a$.

4. Отбросим правую часть, заменим ее действие поперечной силой Q_y^{II-II} и изгибающим моментом M_x^{II-II} и составим уравнения равновесия в проекциях и в моментах относительно оси x , проходящей через центр текущего сечения (т.е. относительно точки D):

$$\sum Y_i = 0; \quad V_A - q2a - Q_y^{II-II} = 0; \quad \sum M_{Di} = 0; \quad -V_A(2a + z_2) + q2a(a + z_2) + M_x^{II-II} = 0.$$

Отсюда получаем: $Q_y^{II-II} = V_A - q2a.$

$$M_x^{II-II} = V_A(2a + z_2) - q2a(a + z_2).$$

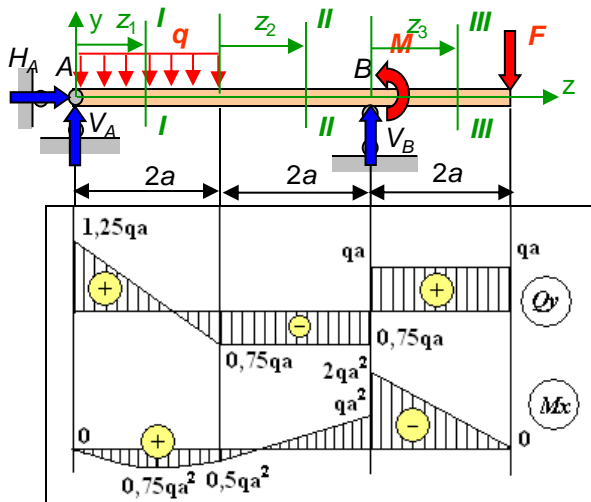
Аналогично получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq 2a$): $\sum Y_i = 0; \quad Q_y^{III-III} - F = 0; \quad \sum M_{Ei} = 0; \quad -M_x^{III-III} - F(2a - z_3) = 0.$

$$Q_y^{III-III} = F.$$

$$M_x^{III-III} = -F(2a - z_3).$$

Лекция 3 (продолжение – 3.3)

Используя полученные выражения для поперечной силы и изгибающего момента построим эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подставляя значения реакций и координаты начала и конца участков. В случае квадратичного изменения величины (изгибающий момент на первом участке) дополнительно подставляется координата точки внутри интервала, например, посередине. Откладывая не на каждом из участков значения поперечных сил и изгибающего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюры Q_y и M_x :



Полученные выражения показывают, что: **поперечная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций на вертикальную ось внешних сил, взятых по одну сторону от сечения, изгибающий момент - алгебраической сумме моментов относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести сечения, внешних сил взятых по одну сторону от сечения!**

$$Q_y = \sum F_{yi}^{\text{прав}} = \sum F_{yi}^{\text{лев}}$$

$$M_x = \sum M_{xi}^{\text{прав}} = \sum M_{xi}^{\text{лев}}$$

Знак слагаемых положителен, если рассматриваемый фактор, будучи приложен к поперечному сечению другой части, соответствует положительному направлению определяемого внутреннего усилия.

Свойства эпюр:

1. Равномерно распределенная нагрузка на участке своего действия вызывает на эпюре Q наклонную прямую линию, падающую в сторону действия нагрузки, а на эпюре M – параболу с выпуклостью в ту же сторону.
2. Сосредоточенная сила вызывает на эпюре Q скачок в точке приложения силы в сторону действия силы, а на эпюре M – перелом в ту же сторону.
3. Сосредоточенный момент не вызывает на эпюре Q в точке его приложения никаких особенностей, а на эпюре M вызывает скачок в ту же сторону.

Лекция 4

- **Центральное растяжение-сжатие** – Во многих элементах конструкций возникают только продольные усилия, вызывающие в них деформации растяжения или сжатия (стойки, элементы ферм, тяги, тросы и т.п.). При этом в местах приложения условно сосредоточенных сил характер распределения деформаций достаточно сложный и отличается от распределения деформаций на удалении от этой локальной области. Размер этой области равен примерно наибольшему из размеров поперечного сечения.
- **Принцип Сен-Венана** - Если совокупность некоторых сил, приложенных к небольшой части поверхности тела, заменить статически эквивалентной системой других сил, то такая замена не вызовет существенных изменений в условиях нагружения частей тела, достаточно удаленных от мест приложения исходной системы сил.
- Как показывает опыт, за пределами этой области деформации практически постоянны и поперечные сечения перемещаются параллельно своим начальным положениям. На основании этого вводится **гипотеза плоских сечений** (Я. Бернулли):

Поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными после деформации.

- **Напряжения и деформации** – Как было ранее сказано, задача определения напряжений всегда является *статически неопределимой*. Такие задачи решаются последовательным рассмотрением статической, геометрической и физической сторон.

В данном случае имеем *статическое* уравнение, связывающее внутреннее усилие – продольную силу с напряжением:

$$N = \int_A \sigma_z dA;$$

Для вычисления интеграла необходимо знать закон изменения напряжений по сечению. Этот закон можно установить изучением непосредственно наблюдаемых перемещений (деформаций). Поскольку принимается гипотеза плоских сечений, то при отсутствии внешней *распределенной* продольной нагрузки **деформации постоянны по сечению и по длине стержня (геометрия)**. Из введенного ранее определения деформаций в точке:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{dz} = const.$$



$$\varepsilon_{\text{прод}} = \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – **абсолютная продольная деформация (удлинение)**, l – длина (базовая длина) стержня.

Опытным путем установлена фундаментальная (*физическая*) связь усилий и удлинений (Р. Гук) и в дальнейшем, напряжений и деформаций (Коши, Навье) в виде:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – **модуль упругости** (*физическая постоянная* материала, определяемая экспериментально).

Подстановка последнего соотношения – **закона Гука** в интегральное выражение с учетом постоянства деформации и напряжения дает:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z A; \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении прямо пропорционально величине продольного усилия и обратно пропорционально площади сечения.

Абсолютную деформацию (удлинение) стержня также можно определить через продольное усилие: $\Delta l = \varepsilon_z l = \frac{\sigma}{E} l. \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$

Формула для абсолютного удлинения справедлива лишь при постоянной по длине стержня продольной силе и неизменной площади поперечного сечения! В случае переменной продольной силы, например, при учете собственного веса вертикальных стержней, и/или переменной площади необходимо использовать интегральное выражение:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ndz}{EA}.$$

Лекция 4 (продолжение – 4.2)

- Коэффициент Пуассона** – При растяжении стержня наряду с продольной деформацией (удлинением), определяемой законом Гука, возникает поперечная деформация (сужение поперечного сечения), выражающаяся в уменьшении поперечных размеров стержня.

Относительные поперечные деформации вычисляются как

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_x = -\frac{\Delta b}{b},$$

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_y = -\frac{\Delta h}{h},$$

где b, h – размеры поперечного сечения.

Экспериментально установлено, что имеется линейная связь между продольной и поперечной деформацией:

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}}$$

где μ – коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом Пуассона**.

Коэффициент Пуассона для данного материала в пределах упругих деформаций имеет постоянное значение и находится в пределах от 0 до 0,5.

По **закону Гука**, определяющему связь нормальных напряжений с продольными деформациями:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}.$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Используя *принцип независимости действия сил*, можно записать **обобщенный закон Гука**, учитывающий одновременное действие нормальных напряжений по всем граням элемента:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

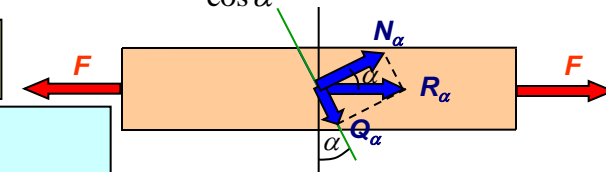
- Напряжения по наклонным площадкам** – При растяжении стержня в его **поперечном сечении возникают только нормальные напряжения**. Посмотрим какие напряжения возникают в сечении, не перпендикулярном оси стержня.

- Отбросим правую часть и заменим ее действие главным вектором внутренних сил R_α . Из уравнения равновесия $R_\alpha = F$.
- Разложим это внутреннее усилие на нормальную и касательную к сечению составляющие N_α и Q_α : $N_\alpha = R_\alpha \cos \alpha = F \cos \alpha$; $Q_\alpha = R_\alpha \sin \alpha = F \sin \alpha$.
- Вычислим нормальные и касательные напряжения по наклонному сечению площадью $A_\alpha = A / \cos \alpha$:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \sin \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{F}{A} \sin \alpha \cos \alpha.$$

С учетом того, продольная сила N в поперечном сечении равна внешней растягивающей силе F , отношение $F/A = N/A$ есть нормальное напряжение в поперечном сечении. Тогда получаем:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha.$$



Анализ полученных соотношений показывает:

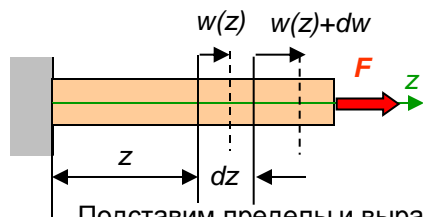
- При $\alpha = 0$ касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения максимальны.
- При $\alpha = 45^\circ$ касательные напряжения максимальны, а нормальные напряжения равны касательным:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z}{2}; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_z}{2}.$$

- При $\alpha = 90^\circ$ (продольная площадка) нормальные и касательные напряжения обращаются в ноль (продольные волокна не давят друг на друга и не сдвигаются).
- На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по абсолютной величине.

Лекция 4 (продолжение – 4.3)

- Определение перемещений при растяжении-сжатии** – Рассмотрим стержень, нагруженный растягивающей силой F . Выделим на расстоянии z участок длиной dz . Удлинение этого участка Δdz равно перемещению второй его границы относительно первой dw .



Деформация на этом участке определяется выражением, представляющим собой дифференциальное уравнение:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{w(z) + dw - w(z)}{dz} = \frac{dw}{dz}$$

Разделим переменные и сведем решение этого уравнения к интегрированию левой и правой частей:

$$dw = \varepsilon_z dz \quad \Rightarrow \quad \int_{w_0}^w dw = \int_{z_0}^z \varepsilon_z dz \quad \Rightarrow \quad w|_{w_0}^w = \int_{z_0}^z \varepsilon_z dz$$

Подставим пределы и выражение для деформации, следующего из закона Гука:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$\Rightarrow w - w_0 = \int_{z_0}^z \frac{N}{EA} dz$$

$$\Rightarrow w = w_0 + \int_{z_0}^z \frac{N}{EA} dz$$

Здесь w_0 – перемещение левой границы рассматриваемого участка на расстоянии z_0 , EA – жесткость стержня при растяжении-сжатии, N – продольное усилие.

В случае постоянства продольного усилия и площади поперечного сечения имеем:

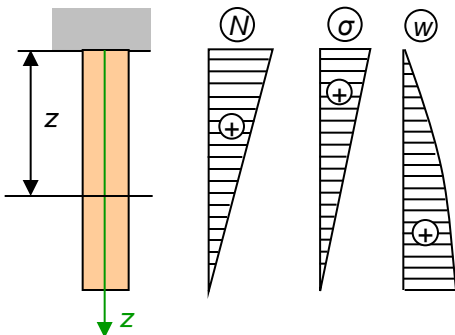
$$w = w_0 + \frac{N}{EA} (z - z_0)$$

Отсюда, как частный случай, получается выражение для абсолютного удлинения стержня ($w_0 = 0$, $z_0 = 0$, $z = l$):

$$w = \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Общая формула вычисления перемещений показывает, что перемещения исчисляются *нарастающим* итогом, т.е. к перемещению, вычисляемому на рассматриваемом участке $[z_0, z]$ (второе слагаемое), добавляется перемещение сечения, соответствующего левой границе, и представляющего перемещение всего участка, как *жесткого целого* (твердого тела). Если на каждом из участков продольное усилие и площадь поперечного сечения постоянны, то определение перемещения любого сечения или конца стержня сводится к простому суммированию удлинений каждого из участков от неподвижного сечения до рассматриваемого.

- Учет собственного веса** – Рассмотрим стержень, нагруженный собственным весом (длина стержня l , объемный вес материала стержня γ). Продольное усилие от собственного веса в произвольном сечении на расстоянии z равно весу нижерасположенной части стержня $N = \gamma A(l - z)$ и *линейно* зависит от координаты. Эпюры продольной силы и нормальных напряжений имеют вид треугольников



Перемещение произвольного сечения на расстоянии z имеет *квадратичную* зависимость от координаты:

$$w = w_0 + \int_{z_0}^z \frac{N}{EA} dz = 0 + \int_0^z \frac{\gamma A(l - z)}{EA} dz = -\frac{\gamma A}{EA} \frac{(l - z)^2}{2} \Big|_0^z = -\frac{\gamma A}{2EA} (l - z)^2 + \frac{\gamma A}{2EA} l^2 = \frac{\gamma A}{2EA} (2l - z)z$$

Определим перемещения конца стержня и сечения на расстоянии половины длины:

$$w = \frac{\gamma A}{2EA} (2l - z)z \Big|_{z=l} = \frac{\gamma A}{2EA} l^2 = \frac{G}{2EA} l, \quad w = \frac{\gamma A}{2EA} (2l - z)z \Big|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma A}{2EA} l^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{G}{2EA} l$$

Здесь G – вес стержня.

Лекция 4 (продолжение – 4.4)

Таким образом, учет равномерно распределенной продольной нагрузки (собственный веса) может быть выполнен непосредственным интегрированием по рассматриваемому участку или **использованием выражения, подобного абсолютному удлинению стержня при постоянной продольной силе, в котором сила уменьшена вдвое!** (см. результат определения перемещения конца стержня).

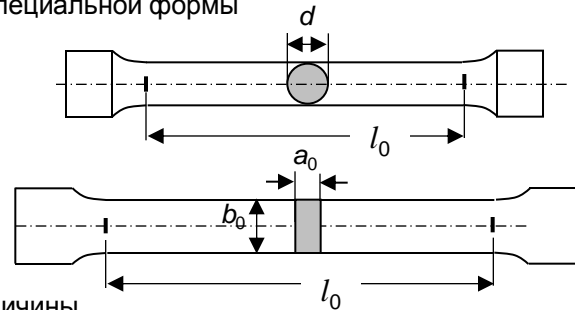
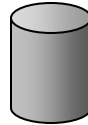
Например, второй результат (перемещение сечения посередине длины стержня) может быть получен, как **сумма перемещений рассматриваемого сечения стержня от действия собственного веса верхней части, учитываемого как *распределенная* нагрузка, и перемещения его от веса нижней части, действующего на верхнюю часть как *внешняя* сила:**

$$w = \frac{\left(\frac{G}{2}\right) \frac{l}{2}}{2EA} + \frac{\left(\frac{G}{2}\right) \frac{l}{2}}{EA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{G}{2EA} l.$$

Лекция 5

- **Испытание материалов на растяжение – сжатие** – При проектировании конструкций, машин и механизмов необходимо знать прочностные и деформационные свойства материалов. Их определяют экспериментально на специальных испытательных машинах. Из всех прочих свойств (твёрдость, сопротивляемость ударным нагрузкам, противодействие высоким или низким температурам и т.п.) основными является сопротивление на растяжение и сжатие, дающие наибольшую и важнейшую информацию о механических свойствах металлов.
- **Испытание на растяжение** – проводят на разрывных или универсальных машинах, имеющих специальные захваты для передачи усилия. Используются стандартные образцы специальной формы (l_0 – длина рабочей части, $l_0/a_0 = 5$ – короткие, $l_0/a_0 = 10$ – длинные):

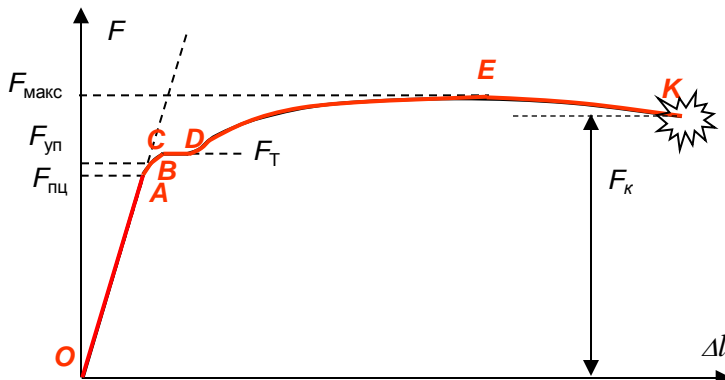
При испытаниях на сжатие применяются цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру $h/d = 1,5 - 3$. Образцы устанавливаются на опорную поверхность с использованием смазки для ослабления влияния сил трения.



Все машины снабжены устройством для автоматической записи в определенном масштабе диаграммы-графика зависимости величины растягивающей силы от удлинения образца.

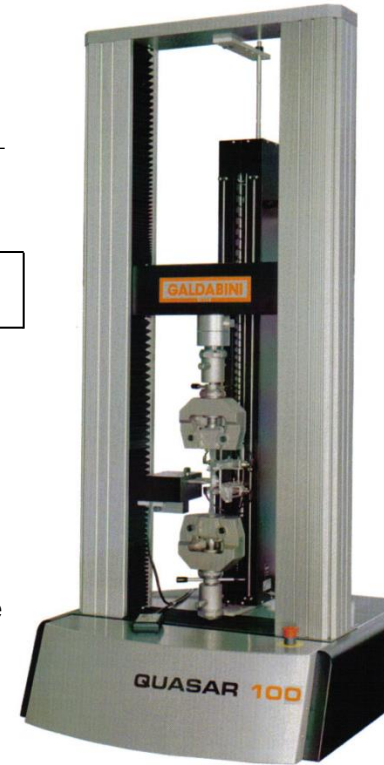
Современные машины компьютеризированы и имеют средства управления процессом нагружения по различным задаваемым программам, вывода данных на экран и сохранения их в файлах для последующей обработки:

- **Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов** – Характерной диаграммой пластичных материалов является диаграмма растяжения *низкоуглеродистой стали* ($< 0,25\% C$):



1. В начальной стадии (OA, до $F_{пц}$) нагружения удлинение растёт *прямопропорционально* величине нагрузки (на этой стадии справедлив закон Гука):
2. Далее (AB, до $F_{уп}$) деформации начинают расти чуть быстрее и не линейно, но остаются малыми и *упругими* (исчезающими после снятия нагрузки).
3. При дальнейшем нагружении (BC, до F_T) криволинейная часть переходит в горизонтальную площадку CD, на которой деформации растут без увеличения нагрузки (*текучесть*). Зона BCD – зона *общей текучести*.
4. При дальнейшем нагружении (DE, до $F_{макс}$) изменяется структура металла и материал вновь может воспринимать возрастание нагрузки (*упрочнение*) вплоть до максимальной.
5. Далее (EK, до F_K) в наиболее слабом месте возникает и развивается локальное уменьшение поперечного сечения (*шейка*). Зона EK – зона *местной текучести*.

В точке K образец внезапно разрушается с резким ударным звуком, но без световых эффектов.



Лекция 5 (продолжение – 5.2)

Характеристики прочности и пластичности – Рассмотренная только что диаграмма растяжения, связывающая нагрузку с удлинением не может непосредственно характеризовать прочность и пластичность материала, поскольку нагрузка зависит от площади поперечного сечения образца, а удлинение – от базовой его длины. Для получения объективных механических характеристик материала, не зависящих от сечения и длины образца, необходимо перейти к напряжениям и относительным удлинениям. Для этого нагрузка делится на начальную или текущую площадь поперечного сечения образца, а по оси абсцисс откладывается соответствующее относительное удлинение для каждой их характерных точек.

В результате получается *диаграмма напряжений*, подобная диаграмме растяжения:

В этой диаграмме характерные точки определяют следующие механические свойства материала:

1. **Предел пропорциональности** $\sigma_{пц}$ – наибольшее напряжение, до которого существует пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией (для Ст3 $\sigma_{пц} = 195-200$ МПа).

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0}$$

2. **Предел упругости** $\sigma_{уп}$ – наибольшее напряжение, при котором в материале не обнаруживаются признаков пластической (остаточной) деформации (для Ст3 $\sigma_{уп} = 205-210$ МПа).

$$\sigma_{уп} = \frac{F_{уп}}{A_0}$$

3. **Предел текучести** σ_T – наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки (для Ст3 $\sigma_T = 220-250$ МПа).

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}$$

4. **Предел прочности** или **временное сопротивление** σ_B – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца (для Ст3 $\sigma_B = 370-470$ МПа).

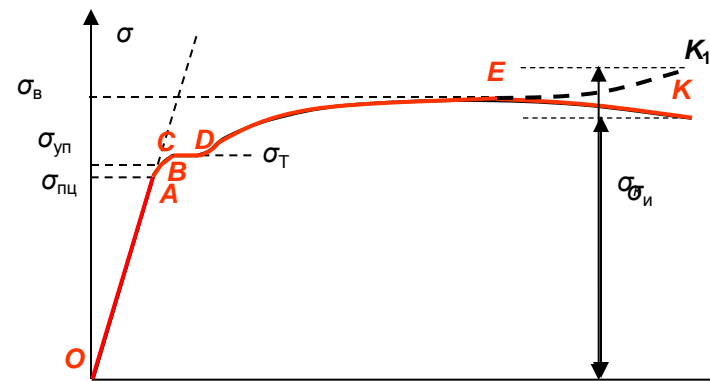
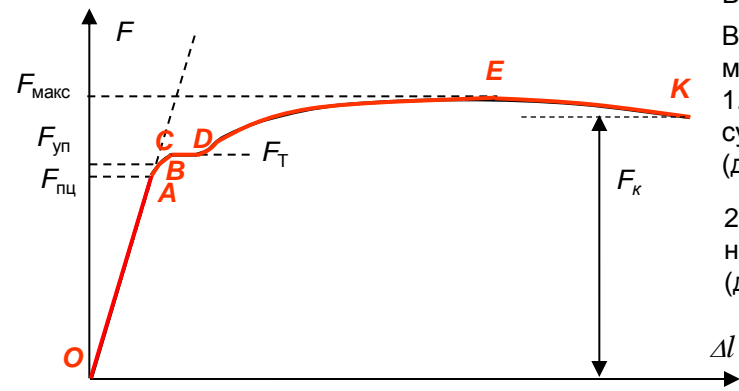
$$\sigma_B = \frac{F_{макс}}{A_0}$$

5. **Истинный предел прочности** или **истинное сопротивление разрыву** $\sigma_{и}$ – напряжение, соответствующее разрушающей силе $F_{К1}$, вычисленное для площади поперечного сечения образца в месте разрыва A_1 (для Ст3 $\sigma_{и} = 900-1000$ МПа). Поскольку на участке EK образуется шейка и площадь поперечного сечения быстро уменьшается, напряжение увеличивается (EK_1) при регистрируемом падении усилия.

$$\sigma_{и} = \frac{F_{К1}}{A_1}$$

Механизм разрушения: в области шейки образуются мелкие продольные трещины, которые затем сливаются в одну центральную трещину, перпендикулярную оси растяжения, далее трещина распространяется к поверхности шейки, разворачиваясь примерно на 45° , и при выходе на поверхность образует коническую часть излома.

В результате получается поверхность излома в виде “конуса” и “чашечки”. Стадия образования конической поверхности показывает, что материал в вершине трещины начинает разрушаться по механизму скольжения (по площадкам максимальных касательных напряжений), характерному для хрупких материалов.



Лекция 5 (продолжение – 5.3)

- **Основные сведения о расчете конструкций. Методы допускаемых напряжений и предельных состояний** – Основной задачей расчета конструкции является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации. Прочность конструкции, выполненной из *хрупких* материалов, считается обеспеченной, если **во всех поперечных сечениях фактические напряжения меньше предела прочности** материала. Величины нагрузки, напряжения в конструкции и механические характеристики материала не могут быть установлены совершенно точно из-за того, что имеют место такие факторы, как случайный характер нагружения, приближенность расчета, погрешность испытаний, разброс механических свойств реальных материалов и т.д.
- Поэтому необходимо, чтобы *наибольшие* напряжения, полученные в результате расчета (расчетные напряжения) не превышали некоторой величины, меньшей предела прочности. Эта величина называется **допускаемым напряжением** и устанавливается делением предела прочности на коэффициент, больший единицы, называемый **коэффициентом запаса**.

В соответствии с этим **условие прочности**:

$$\sigma_{\text{раст}}^{\text{max}} \leq [\sigma_{\text{раст}}];$$

$$\sigma_{\text{сж}}^{\text{max}} \leq [\sigma_{\text{сж}}],$$

где $\sigma_{\text{раст}}^{\text{max}}, \sigma_{\text{сж}}^{\text{max}}$ - наибольшие расчетные растягивающие и сжимающие напряжения в конструкции;

$[\sigma_{\text{раст}}], [\sigma_{\text{сж}}]$ - допускаемые напряжения при растяжении и сжатии соответственно.

Допускаемые напряжения связаны с пределами прочности на растяжение и сжатие отношениями:

$$[\sigma_{\text{раст}}] = \frac{\sigma_{\text{В}}^{\text{раст}}}{n_{\text{В}}}; \quad [\sigma_{\text{сж}}] = \frac{\sigma_{\text{В}}^{\text{сж}}}{n_{\text{В}}},$$

где $n_{\text{В}}$ – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности, определяемый в зависимости от класса конструкции (капитальная, временная и т.п.), от предполагаемого (задаваемого) срока службы, от характера нагрузки (статическая, динамическая и т.п.), от условий работы конструкции, от качества изготовления материалов и других факторов. Величина $n_{\text{В}}$ в большинстве случаев принимается в диапазоне от 2, 5 до 5.

Для конструкций из *пластических* материалов, имеющих одинаковые пределы прочности на растяжение и сжатие, условие прочности:

$$\sigma^{\text{max}} \leq [\sigma],$$

где σ^{max} – наибольшие по абсолютной величине сжимающие или растягивающие напряжения в конструкции.

Допускаемые напряжения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{T}}},$$

где n_{T} – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести ($n_{\text{T}} = 1,5 - 2,5$).

Итак, **условие прочности по методу допускаемых напряжений** при проверке напряжений при растяжении-сжатии стержней имеет вид:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} \leq [\sigma],$$

При подборе сечения принимаемые сечения должны удовлетворять неравенству, вытекающему из условия прочности:

$$A \geq \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]}.$$

При определении грузоподъемности вычисляется допускаемая продольная сила в наиболее нагруженном стержне:

$$[N] \geq A[\sigma].$$

По полученной допускаемой силе определяется далее величина допускаемой нагрузки $[F]$. Условие прочности принимает вид:

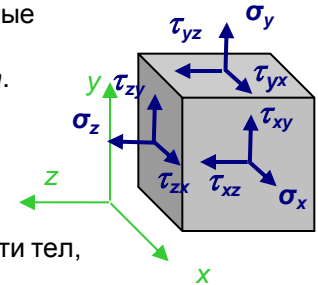
$$F \leq [F].$$

Лекция 6

■ **Напряженное состояние в точке** - При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки выделяется бесконечно малый объемный элемент (параллелепипед со сторонами dx, dy, dz), по каждой грани которого действуют, в общем случае, три напряжения, например, для грани, перпендикулярной оси x (площадка x) – $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$. Этот элемент можно по разному ориентировать в пространстве. При поворотах элемента нормальные и касательные напряжения на его наклонных гранях будут принимать новые значения.

Представляет интерес исследовать, как изменяются эти напряжения от изменения ориентации элемента. Это позволит найти наклонные площадки, по которым напряжения принимают максимальные и нулевые значения. Рассмотрим эту проблему вначале для более простого случая – *плоского напряженного состояния*.

■ **Плоское напряженное состояние** – такое состояние, при котором две параллельные грани элемента свободны от напряжений, т.е. на них отсутствуют и нормальные и касательные напряжения. Такое напряженное состояние возникает в тонких пластинах, поверхности которых свободны от нагрузок, на незагруженной поверхности тел, при изгибе балок, кручении валов.

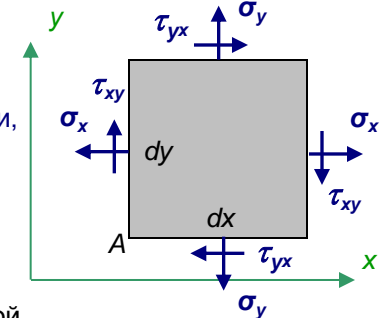


Пусть, например, по площадкам z напряжения отсутствуют:

Ниже будет показано, в этом случае напряжения τ_{zx} и τ_{zy} также должны отсутствовать.

Теперь элемент можно представить в виде его проекции на плоскость x, y . На рисунке показаны положительные направления напряжений, соответствующие правилам:

- положительные нормальные напряжения направлены в сторону внешней нормали соответствующей грани, т.е. они вызывают деформацию *растяжения* элемента.
- положительные касательные напряжения вращают элемент *по часовой стрелке* (при взгляде навстречу оси z).



В общем случае, напряжения в деформированном состоянии меняются от точки к точке, т.е. являются функциями координат. Здесь при рассмотрении бесконечно малого элемента можно считать, что напряженное состояние однородное и напряжения по каждой из граней постоянные и на параллельных гранях элемента равны между собой.

Выделенный элемент должен находиться в равновесии и удовлетворять уравнениям равновесия для произвольной плоской системы сил – *равнодействующих по каждой из граней приложенных напряжений*:

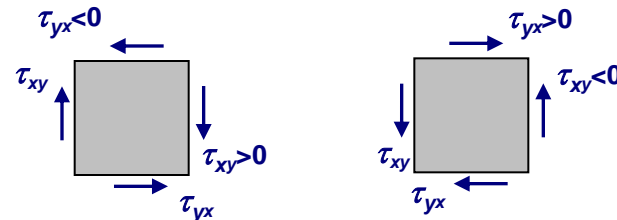
Суммы проекций на координатные оси тождественно равны нулю.

Составим сумму моментов относительно левого нижнего угла:

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -(\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0. \quad \Rightarrow \quad \tau_{yx} = -\tau_{xy}$$

Получен **закон парности касательных напряжений**: Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и противоположны по знаку.

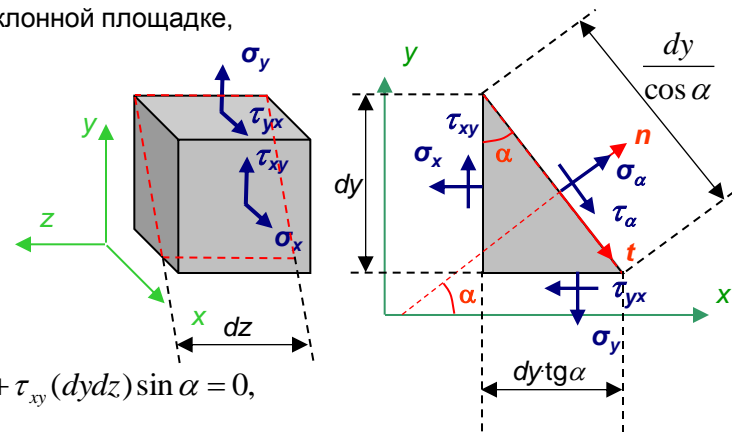
Таким образом, показанные направления касательных напряжений на рисунке, посвященном правилам знаков, не соответствуют равновесному состоянию элемента. Возможные, правильные направления касательных напряжений:



Лекция 6 (продолжение – 6.2)

■ **Напряжения по наклонным площадкам** - Для определения напряжений по наклонной площадке, внешняя нормаль которой повернута на угол α от оси x , используем метод сечений:

1. проведем наклонное сечение,
2. отбросим правую часть,
3. заменим отброшенную часть внутренними усилиями, которые представим в виде компонент напряжений - нормального и касательного (все напряжения показаны положительными),
4. составим уравнения равновесия для равнодействующих напряжений в проекциях на нормаль к наклонному сечению и ось, касательную к сечению:



$$(n): \sigma_{\alpha} \left(\frac{dy}{\cos \alpha} dz \right) - \sigma_x (dydz) \cos \alpha - \sigma_y ((dy \cdot \operatorname{tg} \alpha) dz) \sin \alpha - \tau_{yx} (dy \cdot \operatorname{tg} \alpha dz) \cos \alpha + \tau_{xy} (dydz) \sin \alpha = 0,$$

$$(t): \tau_{\alpha} \left(\frac{dy}{\cos \alpha} dz \right) - \sigma_x (dydz) \sin \alpha + \sigma_y ((dy \cdot \operatorname{tg} \alpha) dz) \cos \alpha - \tau_{yx} (dy \cdot \operatorname{tg} \alpha dz) \sin \alpha - \tau_{xy} (dydz) \cos \alpha = 0.$$

После деления уравнений на $dydz$, умножения на $\cos \alpha$, подстановки закона парности касательных напряжений и переноса в правую часть получим:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{yx} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha).$$

Или используя известные тригонометрические формулы двойного угла:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha$$

Получены формулы для определения напряжений в любых площадках, проходящих через данную точку, если известны напряжения σ_x , σ_y и $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$. Определим, каковы будут напряжения на площадке, перпендикулярной к рассмотренной наклонной площадке:

$$\sigma_{\alpha+90^{\circ}} = \sigma_x \cos^2(\alpha + 90^{\circ}) + \sigma_y \sin^2(\alpha + 90^{\circ}) + \tau_{yx} \sin 2(\alpha + 90^{\circ}) = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha.$$

$$\tau_{\alpha+90^{\circ}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2(\alpha + 90^{\circ}) - \tau_{yx} \cos 2(\alpha + 90^{\circ}) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha$$

Из сравнения выражений для касательных напряжений вновь получаем **закон парности касательных напряжений:** $\tau_{\alpha+90^{\circ}} = -\tau_{\alpha}$.

Складывая выражения для нормальных напряжений получаем **закон постоянства суммы нормальных напряжений в любых взаимно перпендикулярных площадках:**

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^{\circ}} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const.}$$

Из постоянства суммы нормальных напряжений следует, что при повороте этих площадок приращения (изменения) нормальных напряжений равны и противоположны по знаку: $d\sigma_{\alpha} + d\sigma_{\alpha+90^{\circ}} = 0$; $d\sigma_{\alpha} = -d\sigma_{\alpha+90^{\circ}}$.

Соответственно, если на одной из площадок нормальные напряжения достигает максимума, то на второй площадке они приходят к минимуму.

Лекция 6 (продолжение – 6.3)

- **Главные напряжения** - При расчете конструкций на прочность необходимо определить величину максимальных напряжений. **Максимальные и минимальные нормальные напряжения называются главными напряжениями**, а площадки, по которым они действуют – **главными площадками**.

Для определения положения главных площадок достаточно положить нулю первую производную нормальных напряжений по углу наклона:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = \sigma_x (-2 \cos \alpha) \sin \alpha + \sigma_y 2 \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} 2 \cos 2\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\tau_{yx} \cos 2\alpha = 0.$$

$\Rightarrow \quad \text{tg}2\alpha = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}$. Поскольку тангенс имеет одинаковые значения для углов, отличающихся друг от друга на 180° , полученное выражение определяет две площадки, отличающиеся друг от друга на 90° . Таким образом, обе главные площадки взаимно перпендикулярны.

Заметим, что производная нормальных напряжений в наклонной площадке по углу наклона оказывается равной удвоенной величине касательных напряжений по этой площадке: $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\tau_{yx} \cos 2\alpha = -2\tau_{yx}$.

Таким образом, **на главных площадках касательные напряжения обращаются в нуль**.

Для определения величины максимальных и минимальных нормальных напряжений надо найти значения угла через $\text{arctg}(\dots)$ и подставить в исходное выражение для нормальных напряжений, но проще непосредственно использовать следующие тригонометрические формулы:

$$\sin 2\alpha = \frac{\text{tg}2\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha}} = \frac{\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2}} = \frac{2\tau_{yx}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}$$

Подстановка этих тригонометрических функций в формулу нормальных напряжений дает для одной из главных площадок:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \right) + \sigma_y \left(\frac{1}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \right) + \tau_{yx} \frac{2\tau_{yx}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}.$$

Поскольку угол для другой главной площадки отличается от первой на 90° , то синус и косинус двойного угла изменят знак на противоположный, что приведет к изменению знака второго слагаемого:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}.$$

Таким образом, по двум главным площадкам действуют главные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}.$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}.$$

Лекция 6 (продолжение – 6.4)

- **Максимальные касательные напряжения** - Существуют площадки, в которых касательные напряжения достигают максимальных значений. Для определения их положения достаточно положить нулю первую производную касательных напряжений по углу наклона:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha \implies \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \cos 2\alpha + \tau_{yx} 2 \sin 2\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + 2\tau_{yx} \sin 2\alpha = 0 \implies \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{yx}}}$$

Поскольку тангенс имеет одинаковые значения для углов, отличающихся друг от друга на 180° , полученное выражение определяет две площадки, отличающиеся друг от друга на 90° . Таким образом, обе площадки взаимно перпендикулярны. Площадки, в которых касательные напряжения максимальные, называют **площадками сдвига**.

Определим угол между площадкой сдвига и главной площадкой.

Сравним формулы для углов наклона главных площадок и площадок сдвига:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Поскольку правые части обратные друг другу, то $\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \implies \operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha_1) = -\operatorname{ctg} 2\alpha \implies 90^\circ - 2\alpha_1 = -2\alpha \implies \boxed{\alpha_1 = \alpha + 45^\circ}$

Таким образом, **площадки сдвига повернуты относительно главных площадок на угол 45°** .

Для определения величины максимальных касательных напряжений надо найти значения угла через $\operatorname{arctg}(\dots)$ и подставить в исходное выражение для касательных напряжений, но проще *принять в качестве исходного состояния главные площадки* и перейти к площадкам сдвига:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin(2 \cdot 45^\circ) - 0 \cdot \cos(2 \cdot 45^\circ) = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

При подстановке угла 135° или -45° (вторая площадка сдвига) получим тот же результат, но с обратным знаком. Таким образом, вновь соблюдается закон парности касательных и в общем случае можно записать:

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Подставим выражения для главных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \quad \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

- **Понятие о круге Мора для напряжений**- Существуют графический способ определения положений главных площадок и напряжений, а также напряжений по любым другим площадкам. Способ основан на том, что зависимость между нормальными и касательными напряжениями описывается уравнением II порядка, а именно уравнением *окружности*:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha \implies \sigma_\alpha = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \tau_{yx} \sin 2\alpha \implies \sigma_\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha$$

Возведем в квадрат обе части уравнений для напряжений и сложим:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) + \tau_{yx}^2 (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{yx} (\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha)$$

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2$$

Итак, получили уравнение II порядка. Сравните его с уравнением окружности:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Лекция 7

- **Геометрические характеристики поперечных сечений** - Величина нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) стержня зависит от площади этого сечения. Таким образом, **площадь поперечного сечения является геометрической характеристикой, определяющей напряжение при растяжении (сжатии)**. В случае других видов напряженно-деформируемого состояния (изгиб, кручение) напряжения зависят не от площади, а от некоторых *других* геометрических характеристик поперечного сечения.
- Иерархия геометрических характеристик устанавливается видом подинтегрального выражения и представляется следующей:
- **Площадь поперечного сечения:**

$$A = \int_A dA$$

$$S_x = \int_A y dA;$$

$$S_y = \int_A x dA.$$

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

- **Статические моменты площади поперечного сечения:**

Статические моменты используются при определении положения центра тяжести:

Определение координат центра тяжести. Методы определения положения центра тяжести плоских фигур рассматривались в курсе теоретической механики, например, метод разбиения:

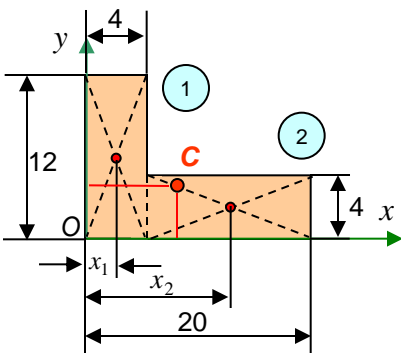
$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}.$$

Здесь x_i, y_i – координаты центров тяжести простых фигур, для которых они известны или легко находятся. Напомним процедуру определения положения центра тяжести:

1. выбрать произвольную (начальную) систему координат x, y ;
2. разбить заданную фигуру на более простые фигуры.
3. вычислить статические моменты и использовать формулы координат центра тяжести.

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Можно показать, что относительно центральных осей статические моменты обращаются в ноль.

Пример 1 – Определить положение центра тяжести уголкового поперечного сечения.



1. Выбираем систему координат x, y с началом в нижнем левом углу сечения.

2. Разбиваем фигуру на два прямоугольника, вычисляем площади и координаты центров тяжести каждого:

$$A_1 = 4 \cdot 4 = 16; \quad x_1 = 2; \quad y_1 = 6;$$

$$A_2 = (20 - 4) \cdot 4 = 64; \quad x_2 = \frac{20 - 4}{2} + 4 = 12; \quad y_2 = 2;$$

3. Вычисляем статические моменты и координаты центра тяжести всего сечения:

$$S_{x1} = y_1 A_1 = 6 \cdot 16 = 96; \quad S_{y1} = x_1 A_1 = 2 \cdot 16 = 32;$$

$$S_{x2} = y_2 A_2 = 2 \cdot 64 = 128; \quad S_{y2} = x_2 A_2 = 12 \cdot 64 = 768;$$

$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{32 + 768}{16 + 64} = \frac{800}{80} = 10.$$

$$y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = \frac{96 + 128}{16 + 64} = \frac{224}{80} = 2.8.$$

Лекция (продолжение – 7.2)

Моменты инерции площади поперечного сечения:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

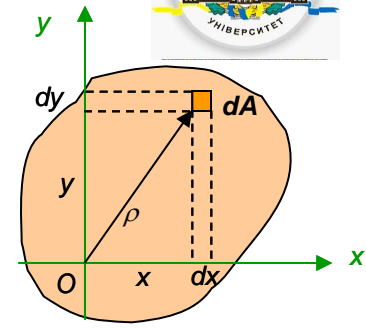
- осевые моменты инерции площади,

$$I_{xy} = \int_A xy dA,$$

- центробежный момент инерции площади.

$$I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA.$$

- полярный момент инерции площади.



Моменты инерции площади используются при определении напряжений при изгибе и кручении.

Можно показать, что **центробежный** момент инерции относительно осей, одна из которых совпадает с осью **симметрии**, равен нулю. В самом деле, в этом случае элементарной площадке dA с координатами x, y всегда будет соответствовать такая же площадка координатами $-x, y$ или $x, -y$. Суммирование (интегрирование) произведений $xy dA$ даст нуль.

Далее будет показано, что для любой, в том числе несимметричной, фигуры можно найти такое положение осей, при котором центробежный момент обращается в нуль.

Полярный момент инерции не зависит ориентации координатных осей x, y

и всегда равен сумме осевых моментов инерции: $I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x.$

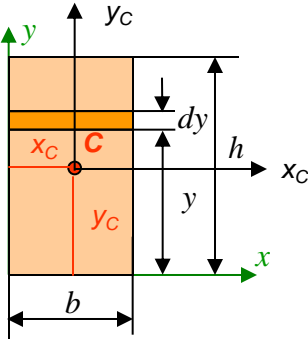
Моменты инерции площади простейших сечений:

Прямоугольник

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = b \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Известно, что центр тяжести прямоугольника находится на пересечении осей симметрии ($x_C = b/2, y_C = h/2$). Для вычисления моментов инерции относительно центральных осей достаточно считать, что координата y измеряется от центральной оси x_C и изменить пределы интегрирования:

$$I_{x_C} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$



Аналогично получим для других осей:

$$I_y = \frac{hb^3}{3}, \quad I_{y_C} = \frac{hb^3}{12}.$$

Центробежный момент инерции (по симметрии): $I_{xy} = 0.$

Полярный момент инерции:

$$I_\rho = I_{x_C} + I_{y_C} = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} = \frac{bh(h^2 + b^2)}{12}.$$

Треугольник

Элементарная площадка имеет переменную ширину и зависит от ее координаты по оси y :

$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}; \quad b_y = \frac{h-y}{h} b;$$

$$dA = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b dy =$$

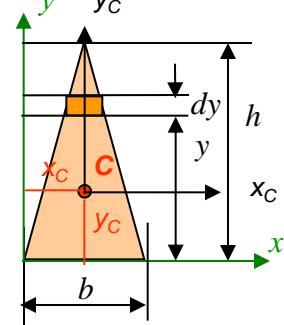
$$= \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy = \frac{b}{h} \left(h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции относительно центральной оси x_C :

$$I_{x_C} = \frac{b}{h} \int_{-h/3}^{2h/3} (hy^2 - y^3) dy = \frac{b}{h} \left(h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-h/3}^{2h/3} = \frac{bh^3}{36}.$$

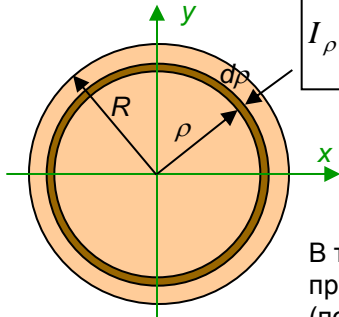
Момент инерции относительно центральной оси y_C :

$$I_{y_C} = 2I_{y_C(b/2)} = 2 \frac{h(b/2)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$



Лекция 7 (продолжение – 7.3)

- **Круглое сечение:** Вычислим вначале полярный момент инерции:



$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Моменты инерции относительно центральных осей с учетом симметрии:

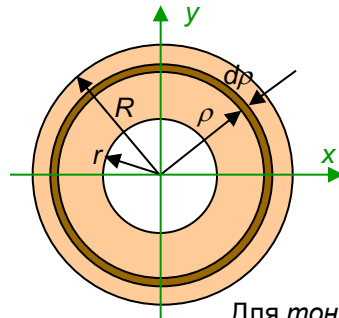
$$I_x = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

В технике часто используют приближенные значения (погрешность менее 2%):

$$I_{\rho} \approx 0,1d^4$$

$$I_x = I_y \approx 0,05d^4$$

- **Кольцевое сечение:** Достаточно изменить пределы интегрирования:

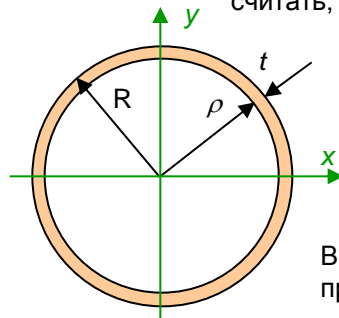


$$I_{\rho} = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_r^R = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

Моменты инерции относительно центральных осей с учетом симметрии:

$$I_x = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

Для тонкостенного кольца ($t < 0,075R$) можно приближенно считать, что $\rho = R_{cp} = \text{const}$ по его толщине и $A = 2\pi R_{cp}t$



$$I_{\rho} = \rho^2 \int_A dA = R_{cp}^2 2\pi R_{cp}t = 2\pi R_{cp}^3 t = \frac{\pi D_{cp}^3 t}{4}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \pi R_{cp}^3 t = \frac{\pi D_{cp}^3 t}{8}$$

В технике иногда используют приближенные значения в виде:

$$I_{\rho} \approx 0,8D_{cp}^3 t$$

$$I_x = I_y \approx 0,4D_{cp}^3 t$$

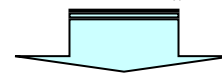
- **Моменты инерции площади составных сечений**

- вычисляются, так же как и при вычислении координат центра тяжести, методом разбиения на простые фигуры, для которых известны или легко вычисляются координаты центров тяжести и моменты инерции.

Например, момент инерции кольцевого сечения может быть вычислен как разность моментов инерции круглого сплошного сечения радиуса R и такого же сечения, но радиуса r . Заметим, что при сложении моментов инерции по каждой из координатных осей для каждой из фигур моменты инерции должны вычисляться относительно осей, являющихся общими для рассматриваемого сечения и всех составляющих фигур. Отсюда следует необходимость располагать формулами, позволяющими переходить от одних осей к другим.

- **Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей**

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$



$$I_{x1} = I_x + 2aS_x + a^2A$$

Аналогично для оси y_1 :

$$I_{y1} = I_y + 2aS_y + b^2A$$

$$I_{x1y1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (y + a)(x + b) dA$$

$$I_{x1y1} = I_{xy} + aS_y + bS_x + abA$$

Формулы упрощаются, если исходные оси являются центральными, т.к. $S_{xc} = S_{yc} = 0$:

$$I_{x1} = I_{xc} + a^2A$$

$$I_{y1} = I_{yc} + b^2A$$

$$I_{x1y1} = I_{xcyc} + abA$$

Лекция 7 (продолжение – 7.4)

Зависимость между моментами инерции при повороте осей

Координаты элементарной площадки dA в системе координат u, v выражаются через исходные координаты x, y линейными зависимостями:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Осевые моменты инерции относительно осей u и v .

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dA + \sin^2 \alpha \int x^2 dA.$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$I_v = \int u^2 dA = \int (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int y^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dA + \cos^2 \alpha \int x^2 dA.$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$I_u + I_v = I_x + I_y.$$

$$I_x + I_y = \text{const} = \text{invar}$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух перпендикулярных осей не зависит от угла α и при повороте осей сохраняет постоянное значение.

Центробежный момент инерции относительно осей u и v .

$$I_{uv} = \int uv dA = \int (y \sin \alpha + x \cos \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \sin \alpha \cos \alpha (\int y^2 dA - \int x^2 dA) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int xy dA.$$

■ **Главные оси и главные моменты инерции** – Полученные зависимости показывают, что при изменении угла поворота осей значения моментов инерции изменяются, при этом сумма осевых моментов инерции остается постоянной.

Это означает, что можно определить такое положение осей, при котором один из осевых моментов достигает максимального значения, а другой – соответственно минимального значения:

Максимальные и минимальные осевые моменты инерции называются главными моментами инерции, а оси, относительно которых они вычисляются, – **главными осями**.

Для определения положения главных осей достаточно положить нулю первую производную осевого момента инерции по углу поворота:

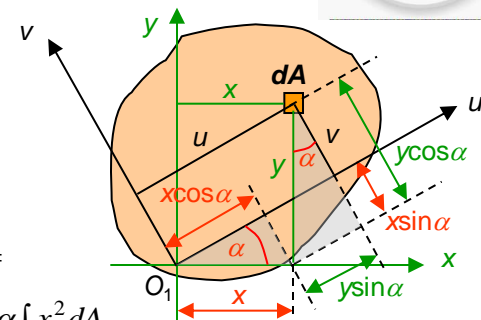
$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I_u}{\partial \alpha} = I_x (-2 \cos \alpha) \sin \alpha + I_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{xy} 2 \cos 2\alpha = -(I_x - I_y) \sin 2\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Полученный результат показывает, что для искомого положения осей **центробежный момент обращается в нуль**. Отсюда же следует:

Поскольку тангенс имеет одинаковые значения для углов, отличающихся друг от друга на 180° , полученное выражение определяет два положения осей, отличающиеся друг от друга на 90° . Таким образом, **обе главные оси взаимно перпендикулярны**.

$$\text{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$



Лекция 7 (продолжение – 7.5)

Для определения величины максимальных и минимальных моментов инерции (главных моментов инерции) надо найти значения угла через $\arctg(\dots)$ и подставить в исходное выражение для осевых моментов инерции, или непосредственно использовать тригонометрические формулы двойных углов, как это было сделано, например, при определении главных напряжений (лекция 10). Здесь попробуем чуть иначе.

Представим осевой момент в виде:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$\Rightarrow I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \frac{1}{\cos 2\alpha} \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\Rightarrow I_u = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

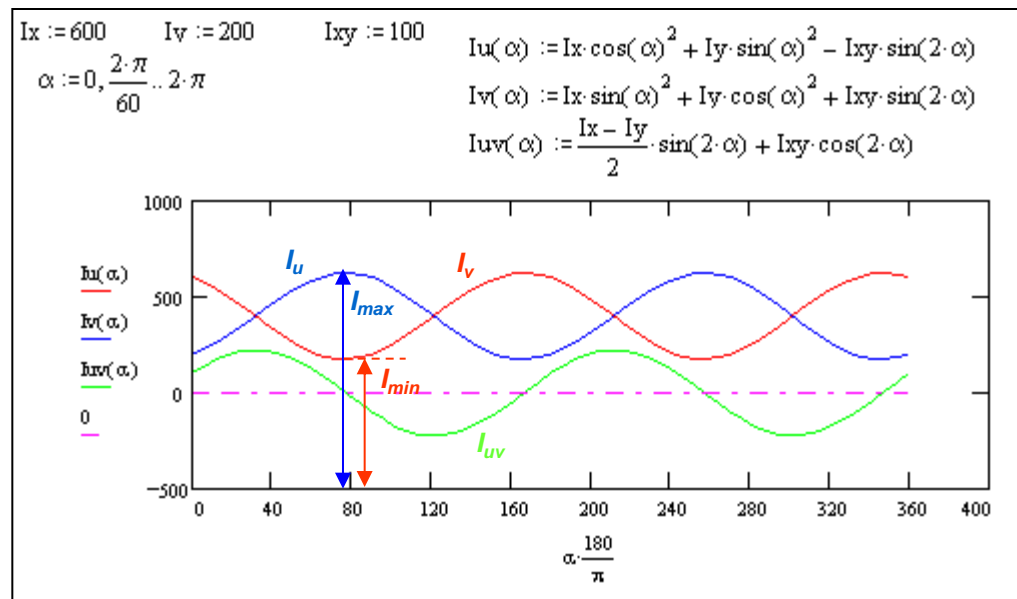
Подставляя последнее выражение и сокращая разность моментов инерции получаем окончательно:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

Знак плюс перед вторым слагаемым относится к максимальному моменту, знак минус – к минимальному.

Замечание. Полученные формулы для моментов инерции, связанные с поворотом осей, а также для главных моментов инерции, практически аналогичны по структуре соответствующим формулам для нормальных и касательных напряжений по наклонным площадкам и для главных напряжений. Отсюда можно заключить, что положения осей, соответствующих экстремальным значениям моментов инерции и сами значения можно находить с помощью круга Мора, построенного для моментов инерции.

Здесь же проиллюстрируем характер изменения моментов инерции при последовательном повороте осей в диапазоне $0 - 2\pi$ (графики построены в системе MathCAD): Хорошо видно, что при достижении осевыми моментами инерции максимальных и минимальных значений центробежный момент инерции обращается в ноль. А при достижении центробежным моментом инерции максимального значения (при повороте от главных осей на 45°) осевые моменты становятся равными между собой.



Лекция 7 (продолжение – 7.6)

- **Радиус инерции** – есть величина, связывающая момент инерции с площадью поперечного сечения и определяемая из равенств: Радиус инерции представляет собой расстояние от рассматриваемой оси до той точки, в которой условно можно сосредоточить всю площадь поперечного сечения. Эта величина характеризует насколько хорошо “развито” сечение, как далеко отстоят от оси отдельные области сечения, что в свою очередь характеризует экономичность сечения при изгибе и сжатии с изгибом.

$$I_x = i_x^2 A.$$

$$I_y = i_y^2 A.$$

Радиусом инерции удобно пользоваться при оценке гибкости сжатых стержней.

Конечно для этого радиусы инерции предварительно вычисляются для типовых и прокатных сечений по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}.$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются **главными радиусами инерции** и определяются по формулам:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}.$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

- **Вычисление моментов инерции сложных фигур** – выполняется в следующем порядке:
 1. Сечение разбивается на части, для которых известны координаты центров тяжести и моменты инерции или легко находятся.
 2. Выбираются начальные оси, относительно которых вычисляются координаты центра тяжести сечения.
 3. Вычисляются координаты центра тяжести сечения.
 4. Проводятся центральные оси (проходящие через центр тяжести сечения), относительно которых вычисляются моменты инерции.
 5. Вычисляются осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно центральных осей.
 6. Вычисляются главные центральные моменты и определяется положение главных осей.

Лекция 8

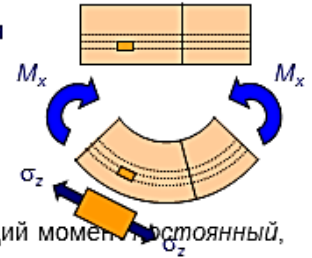
■ Изгиб балок. Основные допущения:

1. **Продольные волокна стержня** (параллельные его оси) **испытывают лишь деформации растяжения-сжатия** и не оказывают давления друг на друга (гипотеза об отсутствии сдавливания продольных волокон).

2. Каждое **поперечное сечение стержня, плоское до деформаций, остается плоским** и нормальным к деформированной оси стержня после деформации (гипотеза плоских сечений).

В общем случае балка может испытывать изгиб под действием изгибающих моментов относительно осей x и y .

Если один из них равен нулю, а другой лежит в *главной* плоскости сечения (плоскости, проходящей через ось стержня и одну из главных центральных осей инерции), то такой изгиб называется **плоским изгибом**. Если при этом изгибающий момент **постоянный**, и это означает *отсутствие поперечной силы*, то такой изгиб называется **чистым изгибом**.



■ **Нормальные напряжения при чистом изгибе** – Как указывалось ранее, задача определения напряжений является статически неопределимой, для решения которой необходимо последовательно рассмотреть три стороны задачи:

1. *Статика*: Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса сечениями и заменим действие отброшенных частей нормальными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии.

Ранее *приведением распределенных сил к центру и центральным осям* было получены интегральные соотношения, связывающие нормальное усилие и изгибающий момент с нормальными напряжениями:

$$M_x = - \int_A \sigma_z y dA \quad \text{Замечание: Знак минус учитывает правило знаков для изгибающего момента и напряжений.} \quad N = \int_A \sigma_z dA; \quad \text{Так как нормальное усилие при изгибе равно нулю, то: } \int_A \sigma_z dA = 0.$$

Последнее указывает на то, что в сечении возникают напряжения разного знака и следует предполагать, что существуют волокна, в которых напряжения равны нулю (нейтральная ось).

Из этих соотношений найти напряжения и положение нейтральной оси пока нельзя, поскольку закон изменения напряжений по высоте сечения неизвестен.

2. *Геометрия*: Согласно гипотезе плоских сечений, продольные волокна испытывают деформации растяжения-сжатия, пропорциональные расстоянию от нейтральной оси. Нейтральная ось, как и центральная ось стержня, *изгибается* и имеет радиус кривизны ρ (т. А – центр кривизны).

Абсолютное удлинение волокна, находящегося на произвольном расстоянии от нейтральной оси, из подобия треугольников равно:

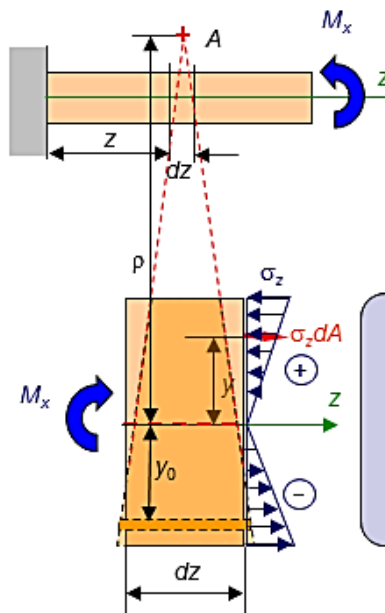
$$\Delta dz = 2 \frac{dz}{\rho} |y_0| = - \frac{y_0}{\rho} dz \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = - \frac{y_0}{\rho}$$

3. *Физика*: По закону Гука: $\sigma_z = E \varepsilon_z$. $\Rightarrow \sigma_z = -E \frac{y_0}{\rho}$

Подставим напряжение в выражение для нормальной силы:

$$- \int_A E \frac{y_0}{\rho} dA = - \frac{E}{\rho} \int_A y_0 dA = 0.$$

Этот интеграл представляет статический момент площади и равенство его нулю означает, что **нейтральная ось проходит через центр тяжести**.



Подставим напряжение в выражение для изгибающего момента ($y_0 \equiv y$):

$$M_x = - \int_A \left(-E \frac{y}{\rho} \right) y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad \Rightarrow \quad \sigma = - \frac{M_x}{I_x} y.$$

Лекция 8 (продолжение – 8.2)

- **Момент сопротивления при изгибе** – Из формулы напряжений при изгибе следует, что наибольшие (положительные – растягивающие) и наименьшие (отрицательные – сжимающие) напряжения в поперечном сечении возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, расположенных по обе стороны от нее:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y.$$

При симметричном сечении относительно нейтральной оси абсолютные величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений равны и могут быть определены по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max}.$$

В других случаях необходимо специально искать y_{\max} , но формула остается в силе.

Величина, зависящая только от размеров и формы поперечного сечения, называется **осевым моментом сопротивления**:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

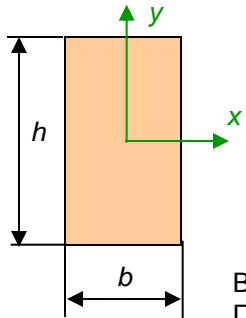
С использованием осевого момента сопротивления максимальные напряжения вычисляются как:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Моментом сопротивления удобно пользоваться при расчете на прочность (подбор сечения) балки при изгибе. Конечно для этого моменты сопротивления предварительно вычисляются для типовых и прокатных сечений по предыдущей формуле.

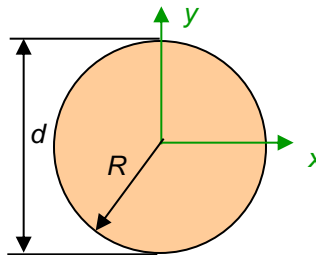
- **Момент сопротивления типовых и прокатных сечений:**

1. **Прямоугольное сечение:**



$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

2. **Круглое сечение:**



$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

3. Для **прокатных сечений** все геометрические характеристики, в том числе и моменты сопротивления, уже вычислены и содержатся в специальных таблицах – сортаментах.

Во всех случаях, кроме круглого сечения, следует использовать моменты сопротивления, соответствующие ориентации плоскости действия изгибающего момента. Например, при действии на балку прямоугольного сечения момента M_y при вычислении максимальных нормальных напряжений необходимо использовать W_y :

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{hb^2}{6}.$$

- **Условие прочности по нормальным напряжениям:**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} < R.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} < [\sigma].$$

Максимальные напряжения не должны превышать расчетных или допускаемых напряжений.

Отсюда при подборе сечения определяется требуемая величина момента сопротивления для прокатных сечений или характерных размеров для других сечений:

$$W_x^{\text{треб}} > \frac{M_x}{R}.$$

В случае, например, прямоугольного сечения необходимо задать один из размеров или соотношение между ними. Пусть $h / b = k$.

Тогда требуемая высота сечения:

$$h^{\text{треб}} = \sqrt[3]{6k W_x^{\text{треб}}}$$

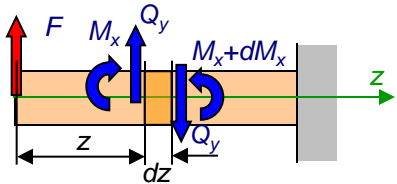
Лекция 8 (продолжение – 8.3)

■ **Прямой поперечный изгиб** – в поперечном сечении балки, кроме изгибающего момента, действует также поперечная сила. При прямом поперечном изгибе изгибающий момент действует в плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения балки. Поперечная сила при этом обычно параллельна плоскости действия изгибающего момента.

■ **Касательные напряжения при поперечном изгибе** - В общем случае при поперечном изгибе балок произвольного профиля могут возникать две компоненты полного касательного напряжения в сечении. Компонента τ_{zx} для такого сечения не может быть найдена методами сопротивления материалов. Касательные напряжения τ_{zy} , возникающие в поперечном сечении, связаны с поперечной силой, действующей в этом сечении бруса, интегральной зависимостью:

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA.$$

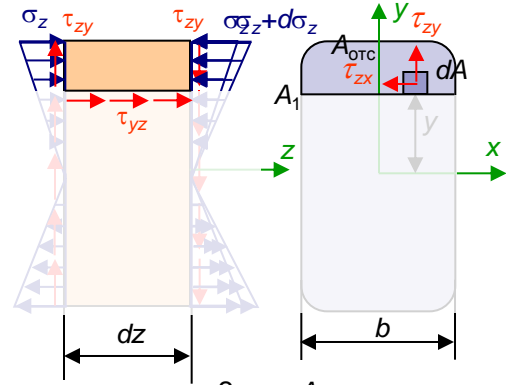
Поскольку закон изменения касательных напряжений по сечению неизвестен, то из этого уравнения найти касательные напряжения для известной поперечной силы нельзя.



Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса и заменим действие отброшенных частей нормальными напряжениями и касательными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии.

При действии поперечной силы изгибающий момент в сечении, отстоящем на расстоянии dz от другого сечения, имеет приращение dM_x .

Согласно зависимости $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$ нормальные напряжения также получают приращения: $d\sigma = \frac{dM_x}{I_x} y$.



Отсечем от рассматриваемого элемента некоторую ее часть горизонтальной плоскостью и заменим ее действие касательными напряжениями (нормальные напряжения в соответствии с гипотезой об отсутствии сдавливания продольных волокон не рассматриваются).

Оставшийся элемент по-прежнему находится в равновесии. Уравнение равновесия в проекции на ось z:

$$\sum Z_i = 0; \quad - \int_{A_{отс}} (\sigma_z + d\sigma_z) dA + \int_{A_{отс}} \sigma_z dA + \int_{A_1} \tau_{yz} dA = 0. \quad \text{или} \quad - \int_{A_{отс}} d\sigma_z dA + \int_{A_1} \tau_{yz} dA = 0.$$

Здесь $A_{отс}$ – площадь отсеченной части поперечного сечения, A_1 – площадь горизонтального сечения элемента, равная bdz .

Перенесем первый интеграл в правую часть и подставим в него выражение для нормальных напряжений: $\int_{A_1} \tau_{yz} dA = \int_{A_{отс}} \frac{dM_x}{I_x} y dA$. Приращение изгибающего момента и осевой момент инерции сечения не зависят от площади отсеченной части и их можно вынести за знак интеграла. Оставшееся подинтегральное выражение совпадает с выражением для **статического момента площади отсеченной части поперечного сечения**: $\int_{A_1} \tau_{yz} dA = \frac{dM_x}{I_x} \int_{A_{отс}} y dA = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{отс}$.

Полагая касательные напряжения *постоянными* по площади A_1 , что соответствует предположению постоянства деформаций сдвига по ширине поперечного сечения, учитывая *закон парности касательных перемещений* и *дифференциальную зависимость поперечной силы*, получаем:

$$\tau_{zy} b dz = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{отс}$$



$$\tau_{zy} = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^{отс}}{I_x b}$$

или

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x b}$$

Формула Журавского

Лекция 8 (продолжение – 8.4)

■ **Распределение касательных напряжений по высоте сечения** – Из формулы Журавского следует, что касательные напряжения в волокнах поперечного сечения, расположенных на некотором расстоянии от оси, зависят от величины статического момента площади отсеченной части и ширины сечения на высоте секущей плоскости:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}$$

■ Построим эпюры касательных напряжений для некоторых простых сечений:

■ **Прямоугольное сечение**

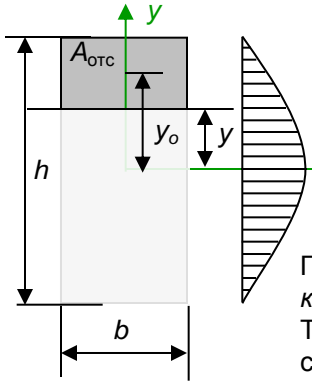
Проведем горизонтальное сечение на высоте y и вычислим **статический момент отсеченной части**:

$$S_x^{\text{отс}} = y_o A_{\text{отс}} = \left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right) b \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{8} (2y + h) b (h - 2y) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b$$

Подставим в формулу Журавского выражения для статического момента и момента инерции:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{3Q_y}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

Полученная зависимость является **квадратичной** от координаты рассматриваемого слоя. Таким образом, касательные напряжения по высоте сечения изменяются по **квадратной параболе**: $y = \pm h/2, \tau_{zy} = 0; y = 0, \tau_{zy} = \tau_{zy}^{\text{max}} = 3Q_y/(2bh) = 1,5 \tau_{zy}^{\text{cp}}$

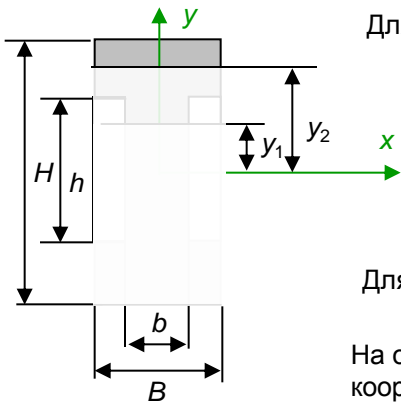


Можно убедиться, что объем эпюры напряжений $\tau_{zy}(y) \cdot b / Q_y$ равен 1, что означает выполнение равенства

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA$$

■ **Толстостенный двутавр**

Сечение имеет ступенчатое изменение ширины и поэтому следует рассматривать отдельно два участка изменения координаты: $0 < y_1 < h/2$ – стенка и $h/2 < y_2 < H/2$ – полка.



Для стенки:

$$S_x^{\text{отс}} = \left(\frac{H}{2} - \frac{H-h}{2} \right) B \left(\frac{H-h}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) b = \frac{1}{4} (H^2 - h^2) B + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) b$$

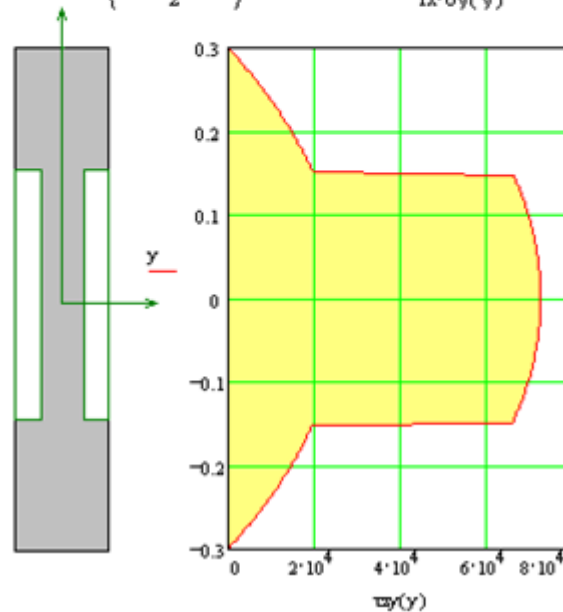
Для полки:

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y_2^2 \right) B$$

На обоих участках соблюдается квадратичная зависимость от координаты волокна. В местах резкого изменения ширины сечения в соответствии с формулой Журавского эпюра имеет скачки:

◀ Лекція 8 (продолжение – 8.5) ▶

$$\begin{aligned}
 & B := 0.1 \quad H := 0.6 \quad b := 0.06 \quad h := 0.3 \quad Q_y := 10^3 \\
 & I_x := \frac{B \cdot H^3}{12} + \left[-\frac{(B-b) \cdot h^3}{12} \right] \quad I_x = 0.002 \quad y := -\frac{H}{2}, -\frac{H}{2} + \frac{H}{200}, \frac{H}{2} \\
 & S_y(y) := \text{if} \left[|y| < \frac{h}{2}, \frac{1}{4} \cdot (H^2 - h^2) \cdot B + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot b, \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) \cdot B \right] \\
 & b_y(y) := \text{if} \left(|y| < \frac{h}{2}, b, B \right) \quad \tau_{zy}(y) := \frac{Q_y \cdot S_y(y)}{I_x \cdot b_y(y)}
 \end{aligned}$$



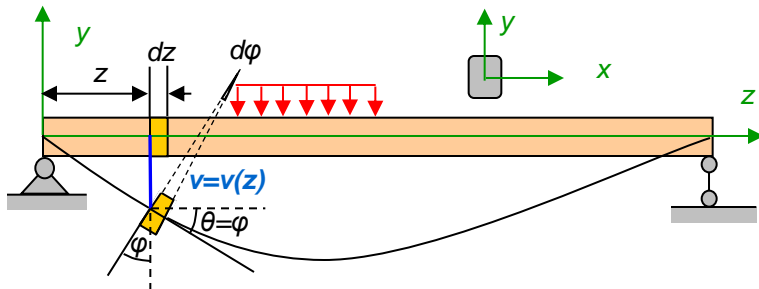
Лекция 9

Перемещения при изгибе – При изгибе ось балки искривляется (прогибается) в результате деформаций каждого элемента балки длиной dz , при которых смежные сечения поворачиваются относительно друг друга на угол $d\varphi$. При поперечном изгибе элемент испытывает дополнительные сдвиговые деформации, также изменяющие положение центра тяжести сечения относительно исходной осевой линии. В общем случае ось балки искривляется по кривой с уравнением $v = v(z)$. Эта кривая называется **упругой линией** или **линией прогибов**.

Основные допущения –

1. Прогибы малы.
2. Влияние деформаций сдвига на величину прогиба пренебрежимо мало.
3. При прогибе балки центр тяжести поперечного сечения перемещается перпендикулярно первоначальной оси балки в направлении главной оси сечения (y).

Поскольку влиянием деформаций сдвига пренебрегается, то каждое сечение согласно гипотезе плоских сечений при изгибе остается нормальным к оси изогнутого стержня (упругой линии). Отсюда угол наклона φ сечения равен углу наклона θ касательной к упругой оси.



Тангенс угла наклона касательной, как известно, определяется как производная от уравнения кривой (см. геометрический смысл производной):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dv}{dz}.$$

По малости прогибов и, следовательно, малости углов: $\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{dv}{dz}.$

В итоге, **угол поворота φ поперечного сечения определяется производной по координате z от функции прогибов:**

$$\varphi = \frac{dv}{dz}.$$

Дифференциальное уравнение прогибов – При выводе формулы нормальных напряжений была получена формула

для радиуса кривизны нейтрального слоя:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

Радиус кривизны является

обратной величиной кривизны кривой:

$$\rho = \frac{1}{|k|}.$$

Кривизна плоской кривой из курса дифференциальной геометрии:

$$k = \pm \frac{d^2 y}{dz^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}^3$$

В силу малости прогибов и углов, а следовательно, малости первой производной ее квадратом по сравнению с единицей можно пренебречь:

$$k \cong \pm \frac{d^2 y}{dz^2}$$

Отсюда из формулы радиуса кривизны получаем:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \pm \frac{M_x}{EI_x}.$$

Выбираем знак плюс в соответствии с правилом знаков для изгибающих моментов

($M_x > 0$, изгибает ось балки выпуклостью вниз)

и второй производной функции прогибов

(> 0 , выпуклость кривой направлена вниз):

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

-дифференциальное уравнение прогибов

Используя другие, полученные ранее, дифференциальные зависимости можно получить:

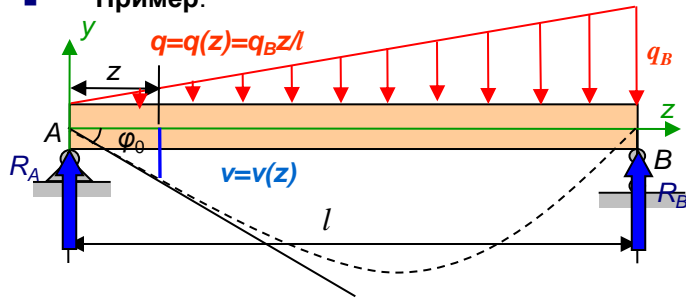
$$\frac{d^3 y}{dz^3} = \frac{Q_y}{EI_x},$$

$$\frac{d^4 y}{dz^4} = \frac{q}{EI_x}.$$

Лекция (продолжение – 9.2)

- **Интегрирование дифференциального уравнения прогибов** – выполняется обычными приемами решения дифференциальных уравнений, рассматриваемых в курсе высшей математики: понижение степени производной, разделение переменной, интегрирование левой и правой частей, определения констант интегрирования или подстановка переменных пределов. Рассмотрим процедуру на примере двухопорной балки, нагруженной линейно изменяющейся распределенной нагрузкой.

■ **Пример:**



1. Запишем дифференциальное уравнение прогибов:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}$$

2. Составим выражение для изгибающего момента в произвольном сечении на расстоянии z:

2.1. Отбросим опоры, заменим их реакциями и найдем величину реакций из уравнений равновесия:

$$\sum M_{iA} = 0; \quad R_B l - \frac{1}{2} q_B l \frac{2}{3} l = 0. \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{q_B l}{3}$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad -R_A l + \frac{1}{2} q_B l \frac{1}{3} l = 0. \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{q_B l}{6}$$

2.2. Вычислим изгибающий момент через левые силы:

$$M_x = R_A z - \frac{1}{2} q(z) z \frac{1}{3} z = \frac{q_B l}{6} z - \frac{1}{6} \left(q_B \frac{z}{l} \right) z^2 = \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right)$$

3. Подставим в дифференциальное

уравнение и понизим порядок производной:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right)$$

4. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$d\varphi = \frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right) dz. \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z^2}{2l} - \frac{z^4}{4l^3} \right) + C$$

Получили выражение для *угла поворота сечения*, в которое входит неизвестная величина C (константа интегрирования), равная углу поворота φ_0 в начале координат (в точке A $z=0$).

5. Представим угол поворота в виде производной от прогиба:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z^2}{2l} - \frac{z^4}{4l^3} \right) + C$$

6. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$dy = \left[\frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z^2}{2l} - \frac{z^4}{4l^3} \right) + C \right] dz. \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z^3}{6l} - \frac{z^5}{20l^3} \right) + Cz + D$$

Получили выражение для *прогиба*, в которое входят неизвестные величины C и D (константы интегрирования), где D равна прогибу y_0 в начале координат (в точке A $z=0$)

Константы интегрирования C и D находятся из граничных условий:

1) $z = 0, y(0) = 0;$ $D = y_0 = 0;$

2) $z = l, y(l) = 0;$

$$y = \frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{l^3}{6l} - \frac{l^5}{20l^3} \right) + Cl = 0$$

$$C = \varphi_0 = -\frac{7}{360} \frac{q_B l^3}{EI_x}$$

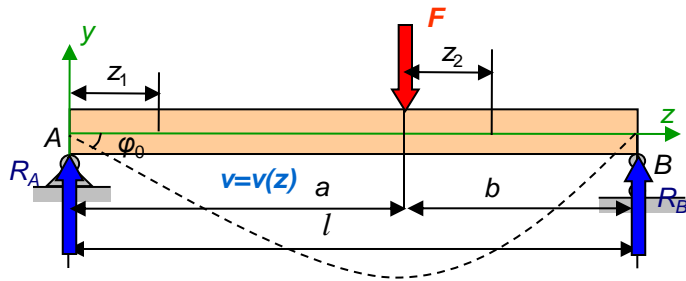
Таким образом, уравнение прогибов имеет вид:

$$y = \frac{1}{EI_x} \frac{q_B l^2}{6} \left(\frac{z^3}{6l} - \frac{z^5}{20l^3} \right) + \left(-\frac{7q_B l^2}{360EI_x} \right) z$$

Лекция 9 (продолжение – 9.3)

- **Интегрирование дифференциального уравнения прогибов при наличии нескольких участков** – Балка, разбивается на участки в случаях ступенчатого изменения сечения, присутствия сосредоточенных сил и/или моментов, а также в случае расположения начала и/или конца распределенной нагрузки в пролете. Все это приводит к тому, уравнения изгибающих моментов, составляемые на каждом из участков, справедливы только в пределах этих участков. На границах участков функции (эпюры) изгибающих моментов имеют резкие переломы или скачки. Такие функции называются *кусочно-гладкими* и все операции дифференцирования или интегрирования необходимо выполнять по каждому из участков по отдельности. После интегрирования на каждом из участков появляются по две константы, подлежащие определению. Они определяются как и раньше *из граничных условий*. Для сечений, являющихся границами смежных участков, такими условиями является равенства значений прогибов и углов поворота слева и справа от сечения (*условия совместности деформаций*). Во многих случаях удобно использовать локальные координаты на каждом из участков.

■ **Пример:**



1. Отбросим связи, заменим их действие реакциями R_A, R_B и вычислим их:

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -Fa + R_B l = 0; \quad R_B = \frac{Fa}{l}. \quad \sum M_{iB} = 0; \quad Fb - R_A l = 0; \quad R_A = \frac{Fb}{l}.$$

2. Составим на каждом из участков выражения для изгибающих моментов, подставим в выражения упругой линии и дважды проинтегрируем их:

$$M_{1x} = R_A z_1 = \frac{Fb}{l} z_1.$$

$$\frac{d^2 y_1}{dz_1^2} = \frac{d\varphi_1}{dz_1} = \frac{Fb}{EI_x l} z_1.$$

$$\varphi_1 = \frac{Fb}{EI_x l} \frac{z_1^2}{2} + C_1.$$

$$y_1 = \frac{Fb}{EI_x l} \frac{z_1^3}{6} + C_1 z_1 + D_1.$$

$$M_{2x} = R_B (b - z_2) = \frac{Fa}{l} (b - z_2).$$

$$\frac{d^2 y_2}{dz_2^2} = \frac{d\varphi_2}{dz_2} = \frac{Fa}{EI_x l} (b - z_2).$$

$$\varphi_2 = \frac{Fa}{EI_x l} \left(bz_2 - \frac{z_2^2}{2} \right) + C_2.$$

$$y_2 = \frac{Fa}{EI_x l} \left(b \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_2^3}{6} \right) + C_2 z_2 + D_2.$$

Таким образом получили уравнения линии прогибов:

$$y_1 = \frac{Fb}{EI_x l} \frac{z_1^3}{6} - \frac{Fab(a+2b)}{6EI_x l} z_1.$$

$$y_2 = \frac{Fa}{EI_x l} \left(b \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_2^3}{6} \right) + \frac{Fab(a-b)}{3EI_x l} z_2 - \frac{Fa^2 b^2}{3EI_x l}.$$

3. Для нахождения констант интегрирования имеем 4 граничных условия:

- 1). в сечении A: $y_1(0) = y_{10} = 0$;
- 2). в сечении B: $y_2(b) = 0$;
- 3). на границе участков: $y_1(a) = y_2(0)$;
- 4). $\varphi_1(a) = \varphi_2(0)$.

Из условия 1 сразу нашлось $D_1 = 0$. Из условия 2: $\frac{Fab^3}{3EI_x l} + C_2 b + D_2 = 0$.

Из условий 3 и 4 имеем: $\frac{Fb}{EI_x l} \frac{a^3}{6} + C_1 a = D_2$. $\frac{Fb}{EI_x l} \frac{a^2}{2} + C_1 = C_2$.

Решить эту систему трех уравнений вручную не просто, но MathCAD легко справляется с этой проблемой:

В частном случае при $a = b = l/2$ получаем:

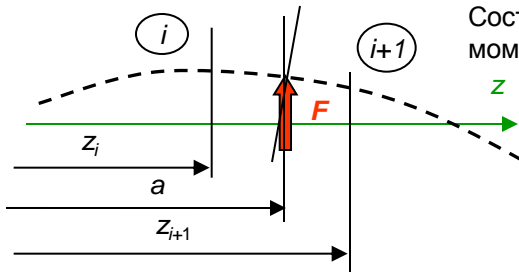
$$C_1 = \varphi_{10} = -\frac{Fl^2}{16EI_x}.$$

$$C_2 = \varphi_{20} = 0.$$

$$D_2 = y_{20} = -\frac{Fl^3}{48EI_x}.$$

Лекция 9 (продолжение – 9.4)

- **Метод начальных параметров** – Предыдущий пример показывает, что при двух участках приходится находить 4 константы интегрирования. Соответственно, при m участков число констант интегрирования равен $2m$. С помощью специального выбора системы отсчета и использования некоторых приемов интегрирования можно добиться того, чтобы количество констант, подлежащих определению, оставалось равным двум при любом числе участков:
- Рассмотрим два соседних участка i и $i+1$, на границе между которыми приложен некоторый сосредоточенный силовой фактор, например, сила F . Начало координат общее для всех участков и совпадает с левым концом балки.



Составим **дифференциальные уравнения прогибов** для этих двух участков (M_i, M_{i+1} – изгибающие моменты на участках i и $i+1$):

$$EI_x \frac{d^2 y_i}{dz^2} = M_{x,i}(z_i);$$

После интегрирования получим:

$$EI_x \varphi_i = \int M_{x,i}(z_i) dz + C_i;$$

$$EI_x y_i = \int (\int M_{x,i}(z_i) dz) dz + C_i z_i + D_i;$$

$$EI_x \frac{d^2 y_{i+1}}{dz^2} = M_{x,i+1}(z_{i+1}) = M_{x,i}(z_{i+1}) + F(z_{i+1} - a).$$

$$EI_x \varphi_{i+1} = \int M_{x,i}(z_{i+1}) dz + F \frac{(z_{i+1} - a)^2}{2} + C_{i+1}.$$

$$EI_x y_{i+1} = \int (\int M_{x,i}(z_{i+1}) dz) dz + F \frac{(z_{i+1} - a)^3}{6} + C_{i+1} z_{i+1} + D_{i+1}.$$

На границе участков $z_i = z_{i+1} = a$ углы поворота и прогибы должны быть одинаковы: $\varphi_i = \varphi_{i+1}, y_i = y_{i+1}$.

Тогда из равенства правых частей следует, что **константы интегрирования равны для рассматриваемых смежных участков** (слагаемые, связанные с силой F , обращаются в ноль, а интегралы тождественно равны для каждого из участков):

$$C_i = C_{i+1}; \quad D_i = D_{i+1}.$$

Составляя подобные уравнения на каждой границе, получим, что на всех участках ($i=1, \dots, m$) константы равны $C_1 = \dots = C_m = EI_x \varphi_0$, и $D_1 = \dots = D_m = EI_x y_0$, где φ_0, y_0 – угол поворота и прогиб в начале координат. Таким образом, при использовании указанной системы отсчета при любом количестве участков получаем всего **две константы**, подлежащие определению, **угол поворота и прогиб в начале координат**, называемые **начальными параметрами**.

Таким образом, получили следующие уравнения для угла поворота и прогиба для любого из участков: $EI_x \varphi(z) = \int M_x(z) dz + EI_x \varphi_0$.

$$EI_x y(z) = \int (\int M_x(z) dz) dz + EI_x \varphi_0 z + EI_x y_0.$$

- **Выражение изгибающего момента**, участвующее в уравнениях, составим в общем виде для любого числа сосредоточенных моментов, сосредоточенных сил и равномерно распределенных нагрузок, расположенных по одну (левую) сторону от рассматриваемого сечения, согласно определения изгибающего момента, как сумму:

$$M_x(z) = \sum_i M_i + \sum_j F_j (z - b_j) + \sum_k q \frac{(z - c_k)^2}{2}.$$

Лекция 9 (продолжение – 9.5)

Итак, в полученных интегральных уравнениях для угла поворота и прогиба в произвольном сечении:

$$EI_x \varphi(z) = \int M_x(z) dz + EI_x \varphi_0, \quad EI_x y(z) = \int (\int M_x(z) dz) dz + EI_x \varphi_0 z + EI_x y_0.$$

выражение для изгибающего момента имеет вид:

$$M_x(z) = \sum_i M_i + \sum_j F_j (z - b_j) + \sum_k q \frac{(z - c_k)^2}{2}.$$

Первый интеграл представим как сумму интегралов:
(сомножитель $(z - a_i)^0$

$$\int M_x(z) dz = \sum_i \int_{a_j}^z M_i (z - a_i)^0 dz + \sum_j \int_{b_j}^z F_j (z - b_j) dz + \sum_k \int_{c_k}^z q \frac{(z - c_k)^2}{2} dz.$$

добавили для “красоты”, нижние пределы задаются от координаты положения каждого силового фактора)

Проинтегрируем это выражение не раскрывая скобок и подставим пределы:

$$\int M_x(z) dz = \sum_i M_i (z - a_i) \Big|_{a_i}^z + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^2}{2} \Big|_{b_j}^z + \sum_k q \frac{(z - c_k)^3}{6} \Big|_{c_k}^z \Rightarrow \int M_x(z) dz = \sum_i M_i (z - a_i) + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^2}{2} + \sum_k q \frac{(z - c_k)^3}{6}.$$

Подстановка интеграла в выражение для угла поворота дает следующее **уравнение углов поворота**:

$$EI_x \varphi(z) = \sum_i M_i (z - a_i) + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^2}{2} + \sum_k q \frac{(z - c_k)^3}{6} + EI_x \varphi_0.$$

Вычислим второй интеграл подобным образом:

$$\int (\int M_x(z) dz) dz = \sum_i M_i \frac{(z - a_i)^2}{2} \Big|_{a_i}^z + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^3}{6} \Big|_{b_j}^z + \sum_k q \frac{(z - c_k)^4}{24} \Big|_{c_k}^z \Rightarrow \int (\int M_x(z) dz) dz = \sum_i M_i \frac{(z - a_i)^2}{2} + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^3}{6} + \sum_k q \frac{(z - c_k)^4}{24}.$$

Подстановка интеграла в выражение для прогиба дает следующее **уравнение прогибов**:

$$EI_x y(z) = \sum_i M_i \frac{(z - a_j)^2}{2} + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^3}{6} + \sum_k q \frac{(z - c_k)^4}{24} + EI_x \varphi_0 z + EI_x y_0.$$

- Таким образом получено **универсальное уравнение упругой линии (прогибов) балки, называемое также, как уравнение метода начальных параметров**:

(запись слагаемых в порядке увеличения степени координаты и использование факториалов придает особенную изысканность и красоту или, лучше сказать, простоту)

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \sum_i M_i \frac{(z - a_j)^2}{2!} + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^3}{3!} + \sum_k q \frac{(z - c_k)^4}{4!}.$$

Уравнение для углов поворота может быть теперь получено дифференцированием уравнения метода начальных параметров:

$$EI_x \varphi(z) = EI_x \varphi_0 + \sum_i M_i (z - a_i) + \sum_j F_j \frac{(z - b_j)^2}{2!} + \sum_k q \frac{(z - c_k)^3}{3!}.$$

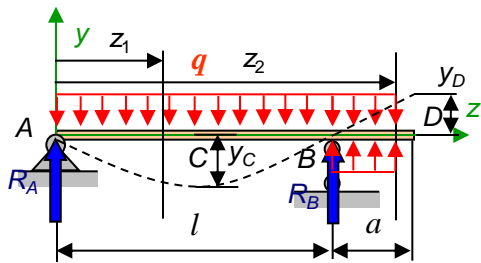
Иногда в литературе [1] в число начальных параметров включается изгибающий момент M_0 , поперечная сила Q_0 и даже q_0 , как силовые факторы, имеющиеся (приложенные) в начале координат (в силу особенности вывода). Они вполне могут быть причислены к обычным силовым факторам, приложенным по длине балки, т.е. включены в соответствующие суммы, полагая $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$.

Лекция 9 (продолжение – 9.6)

Напомним правила, используемые при выводе (или составлении) уравнения начальных параметров:

1. Начало координат для всех участков общее и совпадает с началом балки.
2. В выражение изгибающих моментов (или в число слагаемых уравнения начальных параметров) включаются только те силовые факторы, что находятся левее рассматриваемого сечения.
3. Интегрирование производится не раскрывая скобок.
4. Равномерно распределенная нагрузка раз начавшись не должна заканчиваться. Если она закончилась левее сечения, то можно считать, что она продолжается, но необходимо добавить такую же нагрузку противоположного направления, начинающуюся там, где кончалась заданная нагрузка.
5. Правило знаков для слагаемых от любого фактора соответствует правилу знаков изгибающего момента для этого фактора.

Пример. Определить прогибы в середине пролета и на конце консоли двух опорной балки от приложенной равномерно распределенной нагрузки в пролете.



1. Отбросим опоры и заменим их действие реакциями:

2. Составим уравнения равновесия и определим реакции: $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$.

3. Составим уравнения начальных параметров на первом и втором участках (на втором участке продлим нагрузку q и добавим противоположную по направлению):

$$EI_x y(z_1) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z_1 + R_A \frac{z_1^3}{3!} - q \frac{z_1^4}{4!}, \quad (0 \leq z_1 \leq l);$$

$$EI_x y(z_2) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z_2 + R_A \frac{z_2^3}{3!} + R_B \frac{(z_2 - l)^3}{3!} - q \frac{z_2^4}{4!} + q \frac{(z_2 - l)^4}{4!}, \quad (l \leq z_2 \leq l + a).$$

3. Определим начальные параметры из граничных условий: $y_A = 0, y_B = 0$. Из первого условия: $EI_x y_A = EI_x y|_{z_1=0} = EI_x y_0 = 0$;

Из второго условия: $EI_x y_B = EI_x y|_{z_1=l} = EI_x \varphi_0 l + R_A \frac{l^3}{3!} - q \frac{l^4}{4!} = 0$; $\Rightarrow EI_x \varphi_0 = -R_A \frac{l^2}{3!} + q \frac{l^3}{4!} = -\frac{ql}{2} \frac{l^2}{6} + q \frac{l^3}{24} = -\frac{ql^3}{24}$;

4. Определим прогиб в середине пролета: $EI_x y_C = EI_x y|_{z_1=\frac{l}{2}} = (-\frac{ql^3}{24}) \frac{l}{2} + \frac{ql}{2} \frac{1}{3!} \left(\frac{l}{2}\right)^3 - q \frac{1}{4!} \left(\frac{l}{2}\right)^4 = -\frac{5ql^4}{384}$

Прогиб на конце консоли:

$$EI_x y_D = EI_x y|_{z_2=l+a} = (-\frac{ql^3}{24})(l+a) + \frac{ql}{2} \frac{1}{3!} (l+a)^3 + \frac{ql}{2} \frac{1}{3!} (a)^3 - q \frac{1}{4!} (l+a)^4 + q \frac{1}{4!} (a)^4 = \frac{qal^3}{24}$$

Этот же результат можно получить используя угол поворота на опоре В с учетом симметрии:

$$EI_x y_D = EI_x \varphi_B a = (-EI_x \varphi_0) a = \left(\frac{ql^3}{24}\right) a = \frac{qal^3}{24}$$

В системе MathCAD эта задача решается достаточно просто с использованием условных операторов $if(...)$, обеспечивающих выполнение правила 2:

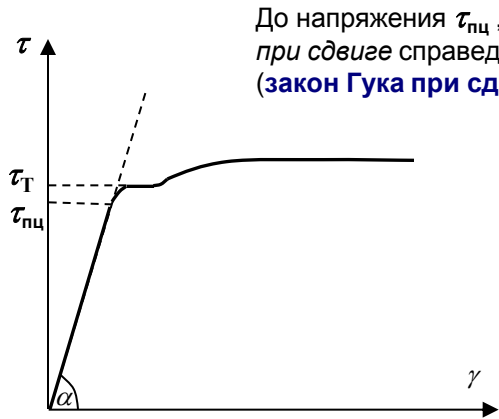
Лекция 10

- Понятие о чистом сдвиге** – Кроме деформации растяжения или сжатия материал нагруженного элемента конструкции может испытывать *деформацию сдвига*. Примером этому может служить напряженно-деформированное состояние элемента стенки балки в произвольном сечении, рассмотренное в предыдущей лекции. Там же было показано, что в опорных сечениях на нейтральной оси на гранях элемента отсутствуют нормальные напряжения, а касательные напряжения максимальны.

Другим примером, можно сказать классическим, является кручение тонкостенной трубы, при котором любой элемент находится только под действием касательных напряжений.

Напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тем, что на гранях элемента возникают только касательные напряжения, называют чистым сдвигом.

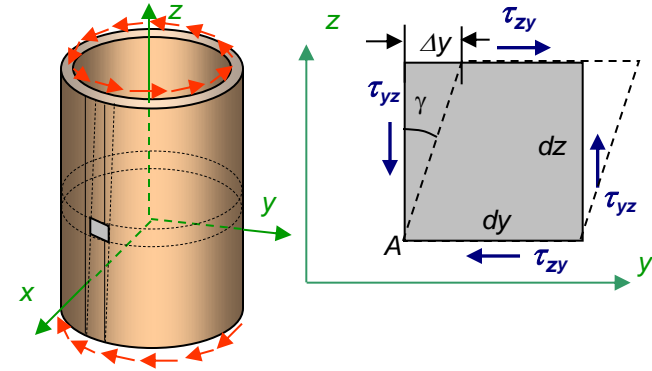
- Закон Гука сдвиге** – Деформации чистого сдвига экспериментально изучаются путем кручения трубчатых образцов. Экспериментальная диаграмма сдвига, связывающая напряжения и угол сдвига, для пластичной стали имеет такой же характер изменения, как и диаграмма растяжения:



До напряжения $\tau_{пц}$, называемого *пределом пропорциональности при сдвиге* справедлива линейная зависимость (**закон Гука при сдвиге**):

$$\tau = G\gamma.$$

Здесь γ - относительный сдвиг: $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta y}{dy}$.
 G – модуль сдвига.



Касательное напряжение, при котором угол сдвига возрастает при постоянном напряжении называется *пределом текучести при сдвиге*.

- Связь между модулем сдвига и модулем упругости при растяжении** – Модуль сдвига и модуль упругости при растяжении являются физическими постоянными материала, характеризующими жесткость в каждом из этих двух видов деформации. Поскольку удлинение диагонали элемента, вызванное сдвигом, может быть получено также растяжением этого волокна под действием нормальных напряжений, эти константы должны быть связаны между собой некоторым соотношением:

Удлинение диагонали элемента вследствие деформации сдвига ($dy = dz$): $\Delta ds = \Delta y \cos 45^\circ$.

$$\Rightarrow \Delta ds = \gamma dy \cos 45^\circ. \Rightarrow \Delta ds = \gamma (ds \cos 45^\circ) \cos 45^\circ = \gamma ds \cos^2 45^\circ. \Rightarrow \Delta ds = \frac{\tau}{G} ds \cos^2 45^\circ = \frac{\tau}{2G} ds.$$

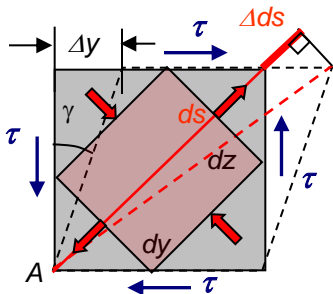
Удлинение диагонали элемента вследствие деформации растяжения ($\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$):

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) = \frac{1}{E} (\tau - \mu(-\tau)) = \frac{(1 + \mu)\tau}{E}. \Rightarrow \Delta ds = \frac{(1 + \mu)\tau}{E} ds. \Rightarrow \frac{(1 + \mu)}{E} = \frac{1}{2G}.$$

или

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

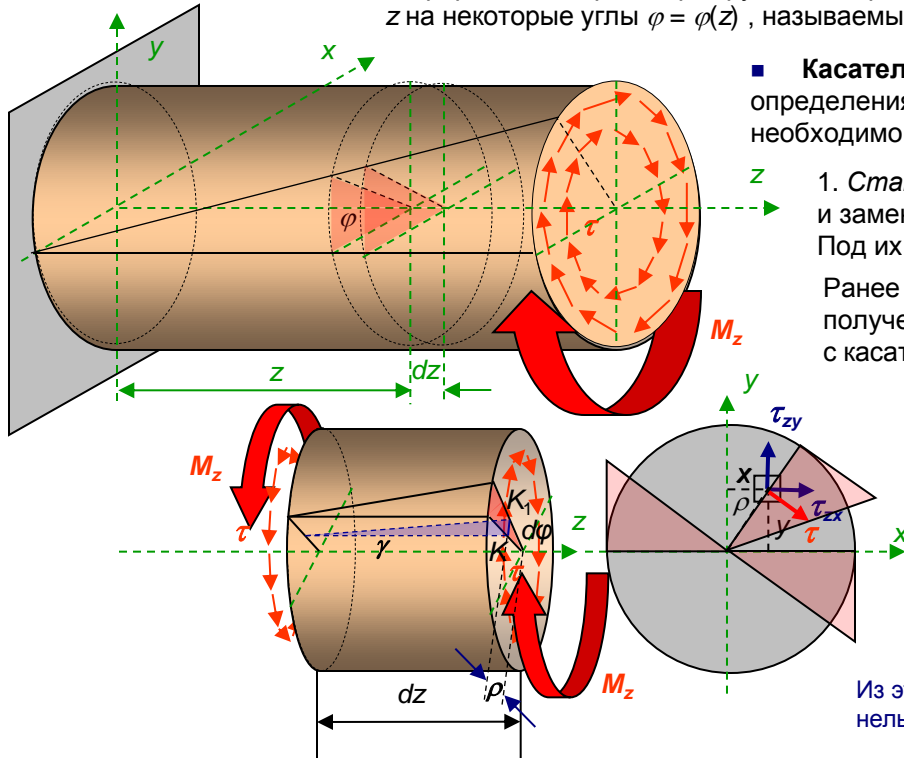
Таким образом **существует соотношение между модулем сдвига и модулем упругости при растяжении** с участием коэффициента Пуассона. Любую из этих величин можно определить, если известны две другие.



Лекция 10 (продолжение – 10.2)

■ **Кручение стержней круглого поперечного сечения** – Кручение характерно тем, что в поперечных сечениях возникают касательные напряжения τ , приводящиеся к крутящему моменту M_z .

Деформация стержня при кручении выражается тем, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси стержня z на некоторые углы $\varphi = \varphi(z)$, называемые *углами закручивания*.



■ **Касательные напряжения при кручении** – Как указывалось ранее, задача определения напряжений является статически неопределимой, для решения которой необходимо последовательно рассмотреть три стороны задачи:

1. **Статика:** Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса сечениями и заменим действие отброшенных частей касательными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии.

Ранее *приведением распределенных сил к центру и центральным осям* было получено интегральное соотношение, связывающие крутящий момент с касательными напряжениями:

$$M_z = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

Касательное напряжение произвольного направления в каждой точке плоскости поперечного сечения можно разложить по двум другим направлениям, а именно, по радиусу ρ , соединяющему точку с центром тяжести сечения, и по перпендикуляру к этому радиусу. Момент относительно центральной оси z будет создавать лишь вторая компонента, обозначаемая одним символом τ . Тогда:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA$$

Из этого соотношения найти напряжение по известному крутящему моменту пока нельзя, поскольку закон изменения напряжений по радиусу сечения неизвестен.

2. **Геометрия:** Согласно гипотезе плоских сечений при своем повороте сечения остаются плоскими (справедливо лишь для круглых сечений). Следующее допущение состоит в том, что все радиусы сечения остаются прямыми и поворачиваются на один тот же угол (угол закручивания).

Угол закручивания двух смежных сечений отличается на величину $d\varphi$.

Угол сдвига в произвольной точке сечения, находящейся на расстоянии ρ от центральной оси, равен отношению длины дуги KK_1 к dz :

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{KK_1}{dz}$$

Длина дуги KK_1 : $KK_1 = \rho d\varphi$.

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

3. **Физика:** По закону Гука при сдвиге: $\tau = G\gamma$. $\Rightarrow \tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$

Подставляем в интеграл:

$$M_z = \int_A G \frac{d\varphi}{dz} \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_p. \Rightarrow d\varphi = \frac{M_z}{GI_p} dz$$

Подставляем в выражение для напряжений:

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho$$

◀ Лекция 10 (продолжение – 10.3) ▶

Полученная формула показывает, что касательные напряжения линейно зависят от расстояния рассматриваемого волокна до центральной оси и принимают Максимальные значения при $\rho = \rho_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} \rho_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Условие прочности при кручении:

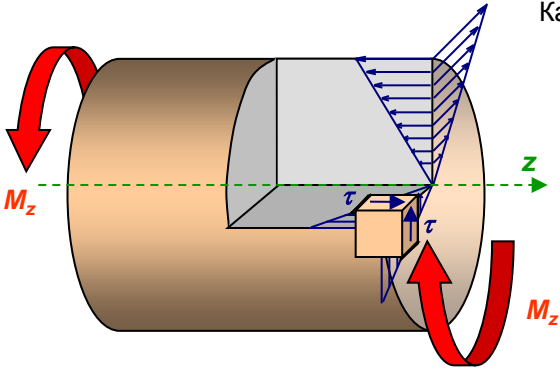
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau]$$

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение материала стержня,
 W_p – полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$$

Лекция 10 (продолжение – 10.4)

■ **Анализ напряженного состояния при кручении** – По закону парности касательных напряжений полученная формула для касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении, одновременно определяет касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной продольному диаметральному сечению:



Каждый прямоугольный элемент материала испытывает **напряженное состояние чистого сдвига**.

■ **Определение углов закручивания** – При выводе формулы касательных напряжений при кручении была получена дифференциальная зависимость:

$$d\varphi = \frac{M_z}{GI_p} dz$$

Угол закручивания определяется из этого дифференциального соотношения интегрированием левой и правой части:

$$\varphi = \int_{z_0}^z \frac{M_z}{GI_p} dz + \varphi_0,$$

где φ_0 – угол поворота при $z = 0$.

В частном случае при постоянном моменте M_z , постоянной жесткости GI_p и неподвижном сечении в начале координат ($\varphi_0 = 0$) получаем:

$$\varphi = \frac{M_z z}{GI_p} \Big|_0^l = \frac{M_z l}{GI_p}.$$

Этой формулой можно пользоваться при определении угла для вала *постоянного* или *ступенчато постоянного* сечения, нагруженного *сосредоточенными* моментами.

При этом на каждом из участков, на котором крутящий момент, жесткость постоянны, угол закручивания изменяется по *линейному* закону. Как следует из общей формулы определения угла закручивания, при построении эпюры углов закручивания ординаты эпюры откладываются от уровня предыдущего угла закручивания, т.е. строятся *нарастающим итогом*, учитывая угол закручивания предыдущего участка.

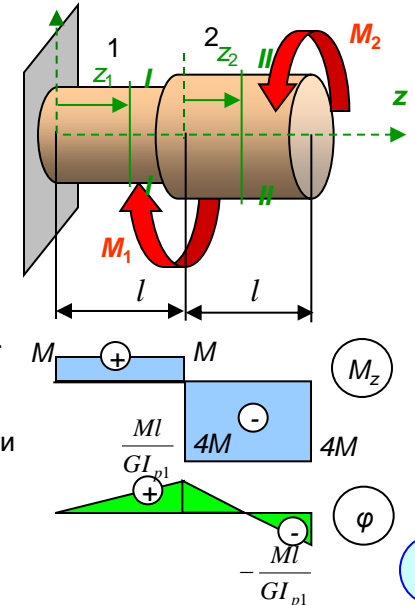
Пример: Построить эпюру углов закручивания для стержня нагруженного сосредоточенными моментами: $M_1=5M$, $M_2=4M$, где M – параметр нагрузки, $I_{p2}/I_{p1} = 2$.

1. Сечение I-I ($0 < z_1 < l$): $M_z^{I-I} = \sum M_{zi}^{справа} = M_1 - M_2 = 5M - 4M = M$. $\varphi_1 = \frac{M_z^{I-I} z_1}{GI_{p1}} \Big|_{z_1=0} = \frac{Ml}{GI_{p1}}$.

2. Сечение II-II ($0 < z_2 < l$): $M_z^{II-II} = \sum M_{zi}^{справа} = -M_2 = -4M$.
 $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_z^{II-II} z_2}{GI_{p2}} \Big|_{z_1=l} = \frac{Ml}{GI_{p1}} + \frac{(-4M)l}{2GI_{p1}} = -\frac{Ml}{GI_{p1}}$.

Расчеты на жесткость – Валы машин испытывают переменные (динамические) нагрузки. При малой жесткости валов могут возникать нежелательные крутильные колебания. Поэтому, помимо условий прочности должны выполняться условия жесткости, ограничивающие величину максимального угла закручивания, отнесенного к длине (погонного угла закручивания):

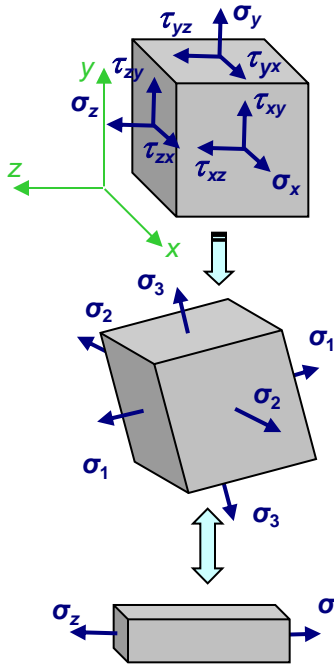
$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GI_p} \leq \theta_{\text{расч}}$$



Лекция 11

- **Общие понятия о теориях прочности** – При испытаниях материалов статической нагрузкой на центральное растяжение (сжатие) достигается предельное состояние, характеризуемое наступлением текучести, появлением значительных остаточных деформаций и/или трещин. Для пластичных материалов за предельную или опасную величину напряжений принимается предел текучести σ_T , для хрупких – предел прочности σ_B .

При эксплуатации конструкций в общем случае по площадкам элементарного объема возникают нормальные и касательные напряжения, пропорциональные увеличению нагрузки. Значение каждого из напряжений зависят от ориентации рассматриваемых площадок.



Вариацией углов поворота площадок можно определить площадки, свободные от касательных напряжений, на которых возникают максимальные нормальные напряжения. Такие площадки и напряжения называются *главными* (способы их определения для плоского напряженного состояния были рассмотрены на лекции 9 первой части курса). Именно главные напряжения и могут служить объективной характеристикой напряженного состояния в точке, поскольку они являются **инвариантами – величинами, независимыми от ориентации площадок**. В итоге при оценке прочности материала вместо рассмотрения 9 компонент напряженного состояния, зависящих от ориентации элементарных площадок, можно рассматривать всего 3 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

При работе конструкции под нагрузкой некоторые точки находятся в условиях плоского или пространственного напряженного состояния, для которых возможны самые различные соотношения между главными напряжениями. Для определения предельного (опасного) состояния в точке (и тем самым всей конструкции), следовало бы **сравнить эти напряжения с предельными**. Однако, практически это сделать невозможно, поскольку провести эксперименты, подобные испытаниям на центральное растяжение-сжатие до разрушения, пришлось бы сделать для каждого из возможных соотношений между главными напряжениями, не говоря уже о том, что реализовать эти соотношения при испытаниях технически трудно.

Таким образом, необходимо иметь возможность **сопоставить прочность материала при плоском и пространственном напряженном состоянии с результатами испытаний при одноосном растяжении-сжатии**. Эта задача решается с помощью выдвижения **гипотезы о каком-то одном критерии, определяющем условие перехода материала в опасное состояние**, составляющим основу соответствующей **теории прочности**.

С использованием того или иного критерия главные напряжения, возникающие в конструкции, удастся связать с предельными механическими характеристиками, получаемыми при одноосном испытании. В результате определяется некоторое **эквивалентное напряжение**, характеризующее рассматриваемое напряженное состояние, которое можно сравнивать с предельным или допускаемым напряжением при одноосном растяжении-сжатии.

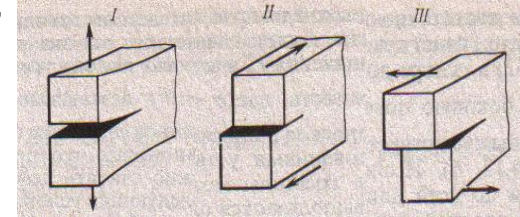
- **Критерий разрушения путем отрыва (хрупкое разрушение)** – Возможно частичное или полное разрушение тела. Различают разрушение *вязкое и хрупкое*, которое могут проявляться как одновременно, так и последовательно. Хрупкое разрушение происходит в результате быстрого распространения трещины после незначительной пластической деформации или без нее. В последнем случае разрушение называется *идеально хрупким*. При хрупком разрушении скорость распространения трещины велика (0,2-0,5 скорости звука), а излом имеет кристаллический вид. При *квазихрупком* разрушении наблюдается некоторая пластическая зона перед краем трещины. Хрупкие трещины могут возникать при средних напряжениях, не превышающих предел текучести. Часто трещины медленно растут и процесс их роста может составлять до 90% времени “жизни” детали. Поэтому имеет значение не столько факт возникновения трещины, сколько темп ее роста.

Лекция 11 (продолжение – 11.2)

Поля нормальных и касательных напряжений у вершины трещины описываются некоторыми функциями, полученные методами теории упругости, в которые входит **коэффициент интенсивности напряжений**, имеющий различные значения в зависимости от типа деформации трещин:

- I – трещина нормального отрыва;
- II – трещина плоского сдвига;
- III – трещина антиплоского сдвига.

Ниже рассматриваемые три теории прочности основываются на критерии разрушения путем отрыва.



I теория прочности - Теория наибольших нормальных напряжений: гипотеза перехода материала в опасное состояние – достижение одного из главных напряжений предельного (опасного) значения.

С использованием этого критерия условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq R \quad \text{при} \quad |\sigma_1| > |\sigma_3|$$

Первое условие используется при $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$, второе – при $\sigma_3 < 0$, если $|\sigma_3| > |\sigma_1|$

$$\sigma_{\text{экв}} = |\sigma_3| \leq R \quad \text{при} \quad |\sigma_1| < |\sigma_3|$$

Теория учитывает лишь одно из главных напряжений, экспериментально подтверждается лишь для хрупких материалов при условии, что одно из главных напряжений значительно больше других.

II Теория прочности - Теория наибольших деформаций: гипотеза перехода материала в опасное состояние – достижение деформациями предельного (опасного) значения.

С использованием этого критерия условие прочности имеет вид:

$$|\varepsilon_{\text{max}}| \leq \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

Здесь при вычислении максимальной деформации участвуют все три главных напряжения:

$$|\varepsilon_{\text{max}}| = \varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

Следовательно, условие прочности,

выраженное через главные напряжения принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R.$$

Теория учитывает все три главных напряжения, но экспериментально подтверждается лишь для хрупких материалов при условии, что все главные напряжения отрицательны.

Таким образом, I и II вторая теории могут применяться лишь для хрупких материалов. Заметим, что хрупкие материалы часто обладают различными механическими характеристиками при растяжении и сжатии, Поэтому в этих случаях необходимо использовать соответствующие расчетные (допускаемые) напряжения.

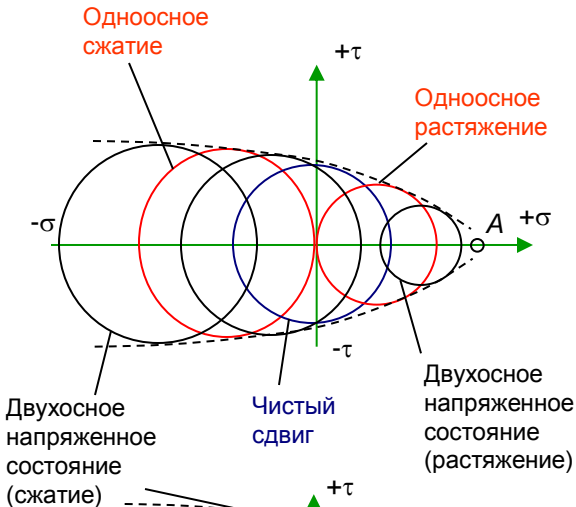
Теория прочности Мора – использует предположение, что напряжение σ_2 мало влияет на прочность материала (в пределах 15%). Таким образом расчет прочности в общем случае трехосного напряженного состояния сводится к расчету прочности при двухосном напряженном состоянии.

Это не означает, что в условии для II теории просто следует приравнять σ_2 нулю. Здесь расчетное напряжение определяется с учетом двух испытаний: на растяжение - σ_p и на сжатие - σ_c .

Лекция 11 (продолжение – 11.3)

Суть теории Мора в следующем: Пусть известны данные об опасных состояниях материала при нескольких различных соотношениях между напряжениями σ_3 и σ_1 . Изображая каждое из состояний кругами Мора получим некоторое семейство таких кругов:

- для двухосного напряженного состояния – круги **черного** цвета;
- для одноосных растяжения и сжатия – круги **красного** цвета;
- для чистого сдвига – круг **синего** цвета.



Для материалов, сопротивление которых при сжатии больше, чем при растяжении, огибающая предельных напряжений (пунктирная кривая) приближается к положительной оси абсцисс и пересекает ее в точке A, соответствующей двухосевому равномерному растяжению. Эксперименты показывают, что при всестороннем сжатии материал не разрушается при любых, сколь угодно больших напряжениях. Поэтому огибающая не пересекает ось абсцисс при сжимающих напряжениях.

Уменьшая круги предельных напряжений в n раз (n – коэффициент запаса) получим область, соответствующую допустимым (безопасным) напряженным состояниям:

Поскольку получить достаточно большое количество опытных данных затруднительно, обычно ограничиваются лишь двумя испытаниями (на растяжение и на сжатие) и огибающие кривые заменяют прямыми, касательными к кругам Мора, построенным по этим испытаниям:

Для такой *упрощенной* диаграммы предельных напряженных состояний возможно получить **аналитическое условие прочности** из подобия прямоугольных треугольников:

$$\frac{0.5\sigma_c - 0.5\sigma_p}{0.5\sigma_c + 0.5\sigma_p} = \frac{0.5\sigma_p - 0.5(\sigma_1 - \sigma_3)}{0.5(\sigma_1 + \sigma_3) - 0.5\sigma_p}$$

Сократим на 0.5 и перемножим:

$$\begin{aligned} \sigma_p \sigma_c - \sigma_1 \sigma_c + \sigma_3 \sigma_c + \sigma_p^2 - \sigma_1 \sigma_p + \sigma_3 \sigma_p &= \\ = \sigma_1 \sigma_c + \sigma_3 \sigma_c - \sigma_p \sigma_c - \sigma_1 \sigma_p - \sigma_3 \sigma_p + \sigma_p^2 & \end{aligned}$$

После сокращения, сложения и сокращения на 2 получим:

$$\sigma_p \sigma_c - \sigma_1 \sigma_c + \sigma_3 \sigma_p = 0$$

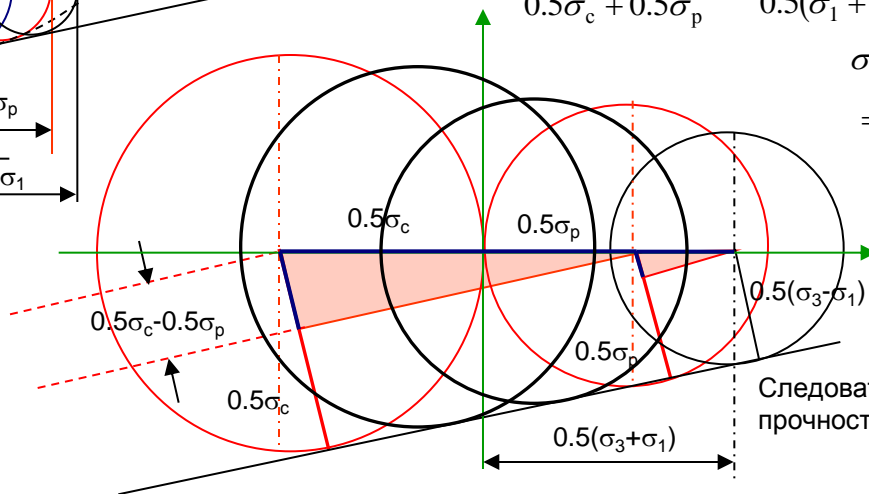
Отсюда соотношение, удовлетворяющее линии предельных циклов:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\sigma_p}{\sigma_c} = \sigma_p.$$

Следовательно, условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \leq \sigma_p.$$

Теория Мора хорошо согласуется с экспериментальными данными при $\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$. Недостатком теории Мора является неучет промежуточного главного напряжения σ_2 .



Лекция 11 (продолжение – 11.4)

- Критерий пластического состояния** – При испытаниях материалов было обнаружено, что в пластическом состоянии максимальное касательное напряжение имеет одно и то же значение для данного материала. В результате в качестве следующей гипотезы перехода материала в предельное состояние можно выбрать **достижение наибольших касательных напряжений предельного (опасного) значения** (критерий пластичности). Эта гипотеза легла в основу **III теории прочности**.

С использованием этого критерия условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sigma_T}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_T$$

В случае плоского напряженного состояния:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \leq \sigma_T$$

При изгибе с кручением: $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} \leq R$

Экспериментальные данные показывают хорошее совпадение результатов для пластичных материалов. Недостатком III теории по-прежнему является неучет среднего главного напряжения σ_2 .

- IV теория прочности (энергетическая)** – Первоначальной попыткой связать все три главных напряжения было выдвижение гипотезы перехода в предельное состояние удельной потенциальной энергии деформации некоторого предельного значения. Эксперименты показали, что при всестороннем сжатии пластические деформации не возникают, хотя при этом накапливается большая удельная потенциальная энергия. В связи с этим была выдвинута гипотеза о том, что предельное состояние обуславливается достижением предельного значения лишь той части удельной потенциальной энергии деформации, которая связана с изменением формы

$u_{\phi} = u - u_{\text{об}}$, где $u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$ - **полная удельная потенциальная энергия**.

Подстановка обобщенного закона Гука дает следующее выражение для полной удельной потенциальной энергии:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Удельную **потенциальную энергию, затрачиваемую на изменение объема**, можно получить из этого выражения, полагая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$:

$$u_{\text{об}} = \frac{(1-2\mu)}{2E} 3\sigma_0^2$$

$$u_{\text{об}} = \frac{(1-2\mu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Примем: $\sigma_0 = \sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

Удельная **потенциальная энергия, затрачиваемая на изменение формы**: $u_{\phi} = u - u_{\text{об}} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) - \frac{(1-2\mu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$

Лекция 11 (продолжение – 11.5)

Полученное выражение $u_{\phi} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) - \frac{(1-2\mu)}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$.

после приведения к общему знаменателю, раскрытия квадрата суммы, умножения и вычитания дает:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad \text{или}$$

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)$$

Замечание: Эти же соотношения можно получить непосредственно из выражения для полной удельной энергии деформации

задавая по главным площадкам напряжения, равные разности действующих главных напряжений и среднего напряжения: $\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_0$, $\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_0$, $\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_0$:

$$u_{\phi} = \frac{1}{2E}((\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2 - 2\mu((\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0)(\sigma_1 - \sigma_0)))$$

и подставляя значение среднего напряжения: $\sigma_0 = \sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Для одноосного растяжения при наступлении текучести $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ удельная потенциальная энергия составляет величину:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2$$

Приравнявая выражения удельной потенциальной энергии изменения формы для трехосного напряженного состояния и для одноосного, получаем эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_T$$

или

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \leq \sigma_T$$

При изгибе с кручением:

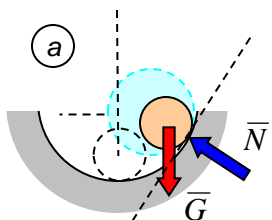
$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} \leq R$$

Как и теория III, энергетическая теория показывает хорошее совпадение результатов с экспериментальными данными для пластичных материалов.

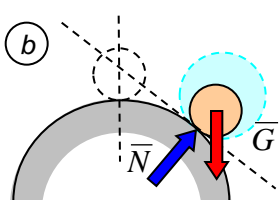
Лекция 12

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия – Соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантируют способности конструкции выполнять предназначенные им функции. В определенных условиях отдельные элементы конструкции могут **потерять устойчивую форму равновесия**, после чего резко изменяется геометрия системы. В результате этого, как правило, изменяется характер нагружения и величина внутренних усилий, что приводит к невозможности дальнейшей эксплуатации конструкции или просто к катастрофическому обрушению.

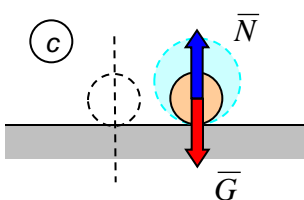
В зависимости от того, как ведет себя система при малом смещении ее из положения равновесия различают а) устойчивое равновесие, б) неустойчивое равновесие и с) безразличное равновесие:



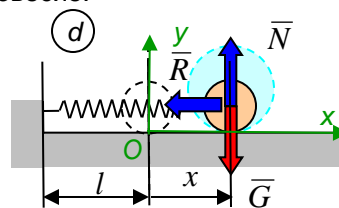
Есть восстанавливающая сила (сила тяжести возвращает шарик к положению равновесия). **Положение равновесия устойчивое.**



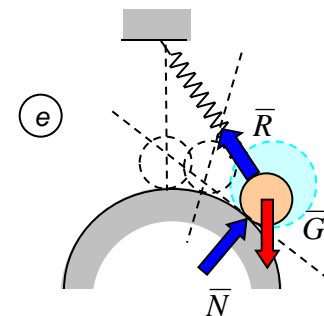
Нет восстанавливающей силы (сила тяжести уводит шарик от положения равновесия). **Положение равновесия неустойчивое.**



Восстанавливающей силы нет и нет силы, выводящей шарик из положения равновесия. **Положение равновесия безразличное.**



Восстанавливающая сила есть (реакция упругой связи – пружины возвращает шарик к положению равновесия). **Положение равновесия устойчивое.**



Есть восстанавливающая сила (реакция пружины) и сила, выводящая шарик из положения равновесия (сила тяжести). **Необходим анализ.**

Определение: Если при малых возмущениях тело отклоняется от своего невозмущенного (исходного) состояния равновесия незначительно, то такое состояние равновесия называется **устойчивым**. Если же состояние равновесия не обладает таким свойством, то оно называется **неустойчивым**.

В упруго деформирующихся системах силы упругости препятствуют уходу системы из начального положения равновесия. При малых возмущениях могут возникать силы, выводящие систему из этого положения. Анализ устойчивости заключается в оценке соотношений между этими силами. *Например:* Жесткий стержень АВ длиной l , нагруженный продольной силой F , удерживается в равновесии упругой связью (пружиной) жесткости c .

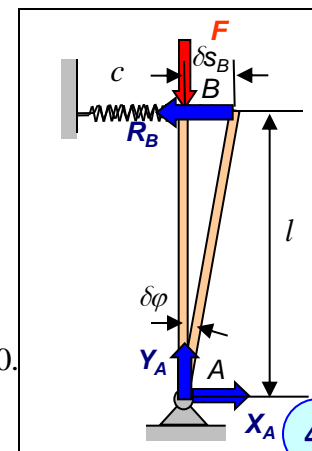
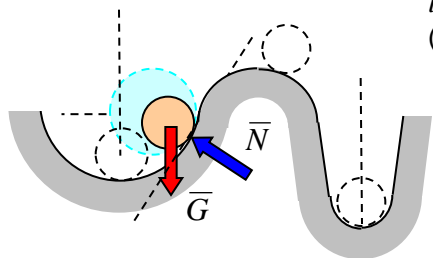
В результате случайного воздействия (возмущения) стержень отклонился от вертикального положения на малый угол $\delta\varphi$ ($\sin \delta\varphi = \delta\varphi$, $\delta s_B = l \delta\varphi$):
Освободим объект от связей и составим моментное уравнение равновесия :

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -F \delta s_B + R_B l = 0. \quad \Rightarrow \quad (-F + cl) \delta s_B = 0 \quad \text{или} \quad (cl - F) l \delta\varphi = 0.$$

Соотношение упругости:

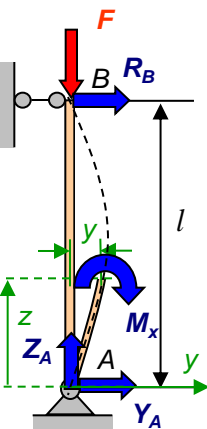
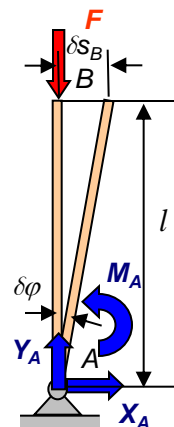
$$R_B = c \delta s_B.$$

При $\delta\varphi \neq 0$ возможно равновесие, если $F = cl = F^*$ (F^* - критическая сила).



Лекция 12 (продолжение – 12.2)

- Таким образом, существует критическое значение силы, уводящей систему из положения из начального положения равновесия, при котором возможно другое (отклоненное) положение равновесия, сколь угодно близкое к первому. При значении этой силы меньшем критического ($F < F^*$), система имеет только одно – тривиальное – положение равновесия ($\delta\varphi = 0$). При значении этой силы равной критическому ($F = F^*$), система имеет смежные положения равновесия, отклоненные от начального и мало отличающиеся от него ($\delta\varphi \neq 0$). При значении этой силы большем критического ($F > F^*$) система не может оставаться в начальном положении равновесия, а будет занимать какие-то другие положения в зависимости от значения силы. Эти положения можно найти решением соответствующего нелинейного уравнения (без предположения о малости перемещений).



$$M_x = -Fy + \boxed{R_B(l-z)} = -Fy; \quad \boxed{R_B = 0 \text{ из } \sum M_{iA} = 0.}$$

Запишем приближенное дифференциальное уравнение упругой линии, полученное при выводе формулы для нормальных напряжений с использованием уравнений равновесия, и подставим значение изгибающего момента: $EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = M_x = -Fy$.

Приведем его к стандартному виду: $\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0$.
Здесь $k^2 = \frac{F}{EI_x}$.

Решение полученного однородного дифференциального уравнения известно и имеет вид:
 $y(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$.

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий:

- 1) $z = 0, y(0) = 0$; $\Rightarrow 0 = C_1 \cos k0 + C_2 \sin k0. \Rightarrow \boxed{C_1 = 0.}$
- 2) $z = l, y(l) = 0. \Rightarrow \boxed{0 = C_2 \sin kl.}$

$$\frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{F}{EI_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{l^2}}$$

Это уравнение имеет два решения:

- 1) $C_2 = 0$ – прогиб тождественно равен нулю по всей длине стержня (прямолинейная форма равновесия);
- 2) $C_2 \neq 0$ – тогда $\sin kl = 0$. Последнее определяет формы упругой линии $n = 1, 2, 3, \dots$ (криволинейных форм равновесия): $\boxed{kl = n\pi.}$

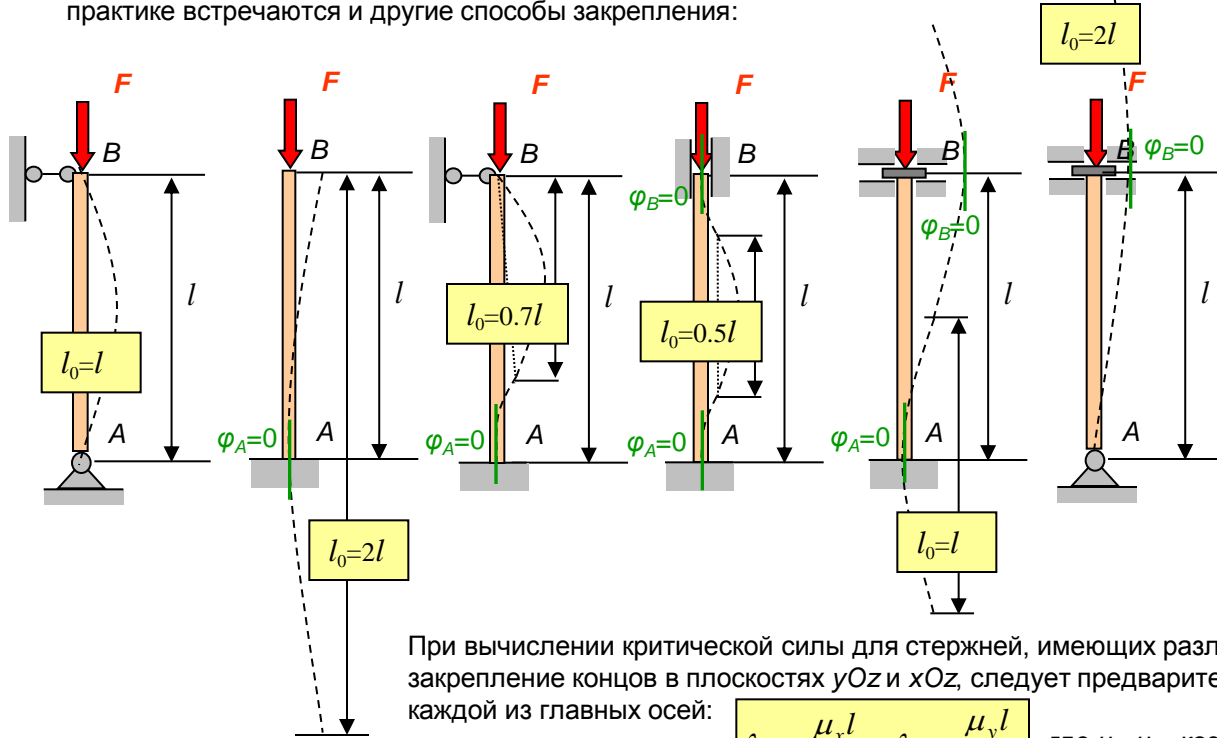
При $n = 1$ получаем наименьшее значение силы:

$$\boxed{F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}}$$

Формула Эйлера

Лекция 12 (продолжение – 12.3)

- Учет влияния способов закрепления концов стержня. Формула Эйлера получена для шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие способы закрепления:



Для каждого из таких случаев необходимо задать соответствующие граничные условия, после чего можно получить необходимые значения критической силы.

На практике поступают иначе: определяют некоторую *условную длину шарнирно опертого по концам стержня*, для которой критическая сила будет равна критической силе для рассматриваемого стержня. Эта условная длина является длиной полуволны синусоиды, которая может построена так, чтобы граничные условия для данного стержня были выполнены:

Критическая сила для каждого из этих стержней может быть получена по обобщенной формуле:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} \quad \text{где } \mu - \text{коэффициент приведения длины } (l_0 = \mu l).$$

При вычислении критической силы для стержней, имеющих различные моменты инерции $I_x \neq I_y$, а также различное закрепление концов в плоскостях yOz и xOz , следует предварительно определить *гибкость* стержня относительно каждой из главных осей:

$$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x}; \quad \lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y}$$

где μ_x, μ_y – коэффициенты приведения длины, i_x, i_y – радиусы инерции сечения относительно осей x и y .

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

С использованием гибкости критическая сила определяется выражением:
Наименьшая критическая сила вычисляется относительно оси, для которой гибкость стержня оказывается наибольшей.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

Формула Эйлера в функции от гибкости